

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Oscilações de Relaxação Aplicadas a Circuitos Elétricos

Izabella D. Basso¹

Bolsista de Iniciação Científica da FAPESP, FCT/UNESP, Presidente Prudente, SP

Marcelo Messias²

Departamento de Matemática e Computação, FCT/UNESP, Presidente Prudente, SP

Neste trabalho apresentaremos as principais características das oscilações de relaxação e uma aplicação de tais oscilações em um circuito elétrico não-linear, modelado pela equação de van der Pol.

Não há uma única escala de tempo nesse tipo de oscilação, e sim duas, sendo uma lenta e outra rápida, mantida sempre por uma fonte externa de energia. Outra característica importante é que, ao contrário das oscilações pendulares, a amplitude é dificilmente alterada (pois depende das características do material utilizado), mas o período pode ser facilmente alterado (ver [2] e [3]).

Variando um parâmetro não-linear podemos obter oscilações de relaxação, que é um caso limite de oscilações auto-sustentadas. Isso pode ser feito a partir da equação de van der Pol, descoberta por Balthazar van der Pol (1889-1959) e dada por

$$x'' - \mu(1 - x^2)x' + x = 0, \tag{1}$$

onde $\mu > 0$ é o parâmetro a ser variado e x depende do tempo t (ver [1]). A equação (1) modela o circuito elétrico apresentado na Figura 1, onde as flechas determinam o sentido



Figura 1: Circuito RLC

da corrente elétrica i , R é o resistor não-linear, C o capacitor e L o indutor. As correntes no resistor, capacitor e indutor são i_R , i_C e i_L , respectivamente, e as voltagens no resistor, capacitor e indutor são v_R , v_C e v_L , respectivamente. A voltagem no resistor e a corrente elétrica estão relacionados por

$$v_R = f(i) = -\alpha i + \beta i^3, \tag{2}$$

com $\alpha, \beta > 0$, que definem como o resistor se comporta. A força eletromotriz é:

$$\varepsilon = v_C + v_L + v_R. \tag{3}$$

¹iza.diasbasso@outlook.com

²marcelo@fct.unesp.br

Utilizando as Leis de Corrente e de Voltagem de Kirchoff, a Lei de Faraday para indutância e capacitância e substituindo esses resultados em (3), obtemos:

$$L(d^2i/dt^2) + (3\beta i^2 - \alpha)(di/dt) + (1/C)i = 0. \quad (4)$$

Assim, a partir da frequência $\omega = (1/\sqrt{LC})$, chegamos ao modelo do circuito dado pela Equação de van der Pol. Fazendo $dx/dt = y$ transformamos a equação (1) em um sistema de duas equações de primeira ordem. As soluções do sistema resultante, no plano de fase, são mostradas na Figura 2, para $\mu = 0.5$ e $\mu = 1.5$:

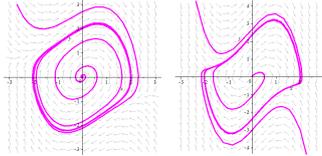


Figura 2: Trajetórias para $\mu = 0.5$ e $\mu = 1.5$, respectivamente

O único ponto crítico da equação (1) é a origem, que é sempre instável, mas podemos observar que há um ciclo limite envolvendo a origem que atrai as trajetórias que começam dentro e fora do ciclo. As oscilações de relaxação nessas soluções podem ser observadas na Figura 3, onde fizemos os gráficos das coordenadas x e y em função de t :

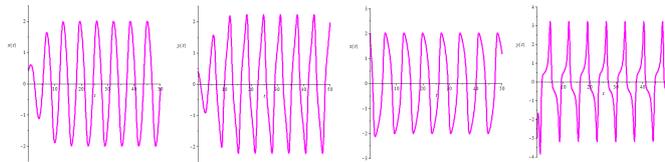


Figura 3: Gráficos de x e y em função de t para $\mu = 0.5$ e $\mu = 1.5$, respectivamente

Podemos observar a presença mais clara de oscilações de relaxação conforme se aumenta o valor de μ . Para valores pequenos, as curvas são quase senoidais (parecidas com oscilações pendulares) e para valores maiores notamos uma subida relativamente lenta e uma queda abrupta, que são as escalas de tempo típicas das oscilações de relaxação ([2] e [3]). Além disso, conforme μ aumenta, o período aumenta, enquanto a amplitude se mantém praticamente a mesma.

Referências

- [1] W. E. Boyce and R. C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. LTC Editora, Rio de Janeiro, 2002.
- [2] R. L. Viana. Oscilações de relaxação e suas aplicações-I, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 2011. DOI: 10.1590/S1806-11172011000300004.
- [3] R. L. Viana. Oscilações de relaxação e suas aplicações-II, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 2011. DOI: 10.1590/S1806-11172011000300005.