Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo Comparativo entre o Método das Potências e suas Acelerações de Convergência

Modesto Valci Moreira Lopes[1]
Hedjany Sena da Silva[2]
Wesliane Maia do Amaral[3]
Ivan Mezzomo[4]
Matheus da Silva Menezes[5]
Departamento Ciências Naturais, Matemática e Estatística, UFERSA, Mossoró, RN

Os autovalores possuem grande importância na determinação da estabilidade de uma solução estacionária na condição de não deslizamento da fronteira no campo de velocidade de um fluido. Devido à dificuldade de se encontrar os autovalores de matrizes de ordem grande de forma analítica, é necessária a utilização de métodos numéricos. Sendo assim, o objetivo desse trabalho é estimar o maior autovalor de matrizes que descrevem problemas de dinâmica dos fluidos, utilizando o método das potências, o método das potências com aceleração de Aitken e o método das potências com deslocamento, de forma a avaliar qual método se mostra mais eficiente em relação ao número de iterações para cada problema. As matrizes utilizadas nos testes descrevem problemas de escoamento de fluidos e foram obtidas através dos repositórios Matrix Market e Florida Sparse Matrix Collection.

Teorema 1: [2, Teorema 6.2] Seja A uma matriz real quadrada de ordem n e sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ seus autovalores e $u_1, u_2, \dots, u_n$ seus correspondentes autovetores. Suponha que os autovetores são linearmente independentes e que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Seja a sequência y_k definida por $y_{k+1} = Ay_k$ com $k = 1, 2, \dots$, onde y_0 é um vetor arbitrário que permite a expansão $y_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j$, com c_j escalares quaisquer e $c_1 \neq 0$, então $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{(y_{k+1})_r}{(y_k)_r} = \lambda_1$, onde r indica a r-ésima componente. Além disso, quando $k \to \infty$, y_k tende ao autovetor correspondente a λ_1.

Quanto maior for $|\lambda_1|$ quando comparado com $|\lambda_2|$, mais rápida será a convergência [2]. O Método de Aitken Δ^2 pode ser utilizado para acelerar a convergência de uma sequência linearmente convergente e pode ser utilizado para acelerar o método das potências.

Teorema 2: [1] Suponha que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência linearmente convergente com limite P. Para motivarmos a criação de uma sequência $\{P'_n\}_{n=0}^{\infty}$ que converge mais rapidamente para P do que $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$, primeiro assumimos que as expressões $P_n - P$, $P_{n+1} - P$ e

[1]modsval@gmail.com
[2]hedjany@icloud.com
[3]weslianemaia1@gmail.com
[4]imezzomo@ufersa.edu.br
[5]matheus@ufersa.edu.br

$P_{n+2} - P$ coincidam e n é suficientemente grande tal que $P = P_n - \frac{(P_{n+1}-P_n)^2}{P_{n+2}-P_{n+1}+P_n}$ (Método de Aitken Δ^2).

De acordo com [2], suponha que A tem autovalores λ_i, reais, com $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n|$. O Método das Potências com deslocamento consiste em gerar uma nova matriz a partir de $(A - qI)$, onde q é um escalar qualquer e I uma matriz identidade de mesma ordem de A. Após isso, aplicamos o método das potências de forma a encontrar o maior autovalor da matriz $(A - qI)$ uma vez que possui autovalores $\lambda_i - q$ e os mesmos autovetores de A. Ao final do método é possível obter o maior autovalor da matriz A. Nesse trabalho, o cálculo do q foi realizado baseado no Teorema do círculo de Gersgorin, onde q é a soma de todos os valores da matriz dividido pelo número de colunas ou linhas.

As matrizes são não esparsas e não diagonalmente dominante com ordem de 236 a 1159. Como critério de parada, usamos o teste do erro absoluto para cada componente de λ_1 dada por $|\lambda_1^{k+1} - \lambda_1^k|_r < \varepsilon$ com precisão $\varepsilon < 10^{-5}$. Na tabela abaixo, AV é o autovalor calculado e os dados entre parênteses se referem ao percentual de eficiência do método das potências com aceleração e com deslocamento em relação ao método das potências.

Tabela 1: Resultado dos experimentos realizadas

Problema	AV M.P.	# Iter. M.P.	AV Δ^2	# Iter. Δ^2	AV M.P.D.	# Iter. M.P.D.
e05r0000	12.755307	397	12.750083	78 (80,35%)	12.755268	383 (3,53%)
e05r0100	12.551547	865	12.537454	554 (35,95%)	12.551421	816 (5,66%)
tomography	17943678	207	17943678	141 (31,88%)	17943678	158 (23,67%)
nos7	9864030.3	144	9864030.3	85 (40,97%)	9864030.3	142 (1,39%)
ex32	116.55129	45	116.55127	26 (42,22%)	116.2751	44 (2,22%)

Analisando a tabela acima, podemos observar que ambos os métodos convergiram em todos os problemas. No entanto, o método das potências com deslocamento e com aceleração de Aitken foram mais eficientes do que o método das potências em relação ao número de iterações, cuja melhora ficou entre 31,88% a 80,35% para o método das potências com aceleração de Aitken e 1,39% a 23,67% para o método das potências com deslocamento.

A partir dos experimentos foi verificado que o método das potências com aceleração de Aitken é mais eficiente em relação ao número de iterações e portanto, sendo o método mais aconselhável para estimar os autovalores para os problemas propostos. Os resultados obtidos podem ser utilizados para determinar a estabilidade da solução estacionária dos exemplos utilizados, porém essa aplicação será realizada em trabalhos futuros.

Agradecimentos: Os autores agradecem o apoio da UFERSA e do CNPQ na execução deste trabalho.

Referências

[1] R. L. Burden, D. Faires and A. M. Burden. *Análise Numérica*. 3. ed., Cengage Learning, São Paulo, 2015.

[2] N. B. Franco. *Cálculo Numérico*. 6. Ed., Pearson, São Paulo, 2006.