Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo da completude do espaço métrico fuzzy ($\mathcal{F}(\mathbb{R})$,d_∞) e sua aplicação no teorema do ponto fixo

Gabriel Silva Delgado[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Campus Campos do Jordão
Michael Macedo Diniz[2]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Campus São José dos Campos

A teoria de conjuntos fuzzy foi proposta por Zadeh em [9]. Conforme a relevância deste tema foi sendo reconhecida e suas ideias divulgadas, surgiram diversas linhas de pesquisa relativas ao assunto, uma delas se refere ao estudo da estrutura topológica do espaço dos números fuzzy [3,4,7]. Em [5], o autor introduz o conceito de espaços métricos fuzzy ($\mathcal{F}(\mathbb{R})$,d_∞). Uma propriedade importante desse espaço é a sua completude [1,8], já que isso garante que toda sequência de Cauchy em $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ é convergente. Ainda em [1] o autor apresenta métricas para as quais o conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ não forma um espaço métrico completo. Na teoria clássica de espaços métricos a completude exerce papel fundamental no estudo de convergência de sequências [6]. Uma aplicação importante desta propriedade está no teorema do ponto fixo, que por sua vez é fundamental para demonstração de diversos resultados, como por exemplo, a análise de estabilidade de equações de diferenças. Fazendo uso da completude de ($\mathcal{F}(\mathbb{R})$,d_∞), em [2], os autores apresentam o Teorema 0.1 e o Teorema 0.2.

Teorema 0.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função e $\widehat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ sua extensão de Zadeh, então f é Lipschitz com constante K se, e somente se, $\widehat{f}$ é Lipschtz com a métrica d_∞ com a mesma constante K.*

Teorema 0.2. *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma contração então $\widehat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ tem apenas um ponto fixo em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.*

O objetivo deste trabalho é apresentar exemplos e contra-exemplos que ilustrem a completude do espaço ($\mathcal{F}(\mathbb{R})$,d_∞) e os Teoremas 0.1 e 0.2.

Por exemplo, considerando a função $f(x) = x^2$, sabemos que para $x \in [0, 1]$, f é uma contração. Sabe-se também que $x = 0$ e $x = 1$, são os dois pontos fixos da função, sendo $x = 0$ assintoticamente estável em $[0, 1]$ e $x = 1$ instável.

Seja $\widehat{x}_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, e a sequência $(\widehat{x}_n)$ dada por $\widehat{x}_{n+1} = \widehat{f}(\widehat{x}_n)$, onde $\widehat{f}$ é a extensão de Zadeh de f. As Figuras 1 e 2 ilustram o comportamento da sequência quando $\widehat{x}_0 = (-0.5, 0, 0.5)$ e $\widehat{x}_0 = (0.5, 0.8, 1.1)$ respectivamente.

[1] gsd2005online@hotmail.com
[2] michael.diniz@ifsp.edu.br

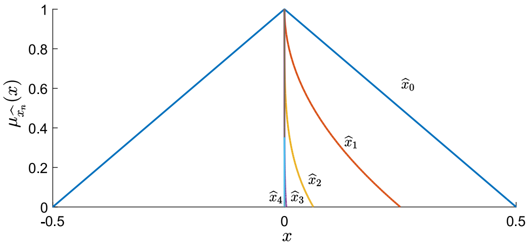

Figura 1: Funções de pertinência de $\widehat{x}_n$ para $\widehat{x}_0 = (-0.5, 0, 0.5)$.

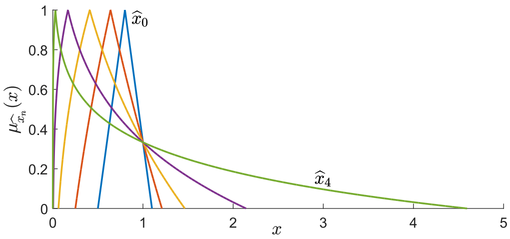

Figura 2: Funções de pertinência de $\widehat{x}_n$ para $\widehat{x}_0 = (0.5, 0.8, 1.1)$.

Nota-se na Figura 1 que para $n > 4$, $\widehat{x}_n$ se aproxima do número crisp 0, isso ocorre pois o suporte de $\widehat{x}_0$ está contido em $(0, 1)$. Já na Figura 2 o suporte de $\widehat{x}_n$ torna-se cada vez maior a medida que n aumenta, neste caso, mesmo com $x = 1$ pertencente ao suporte de $\widehat{x}_n$, a sequência diverge.

A partir das simulações elaboradas foi possível perceber que, se a constante de Lipschitz $K \in [0, 1)$, então a sequência gerada pela recorrência $\widehat{x}_{n+1} = \widehat{f}(\widehat{x}_n)$ sempre irá convergir para um número crisp, e esse número é ponto fixo de f. A sequência só converge para um número fuzzy não crisp se $K = 1$, o que ocorre por exemplo com $f(x) = x$.

Referências

[1] B. Bede. *Mathematics of fuzzy sets and fuzzy logic.* [S.l.]: Springer, 2013.

[2] L. C. Barros, R. C. Bassanezi and P. A. Tonelli. On the continuity of the Zadeh's extension. *Proceeding Seventh IFSA World Congress.* 3-8, 1997.

[3] P. Diamond and P. Kloeden. *Metric spaces of fuzzy sets: theory and applications.* [S.l.]: World scientific, 1994.

[4] R. Goetschel and W. Voxman. Elementary fuzzy calculus. *Fuzzy Sets Syst.*, 18:31–43, 1986.

[5] O. Kaleva, and S. Seikkala. On fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets Syst.*, 12:215–229, 1984.

[6] E. L. Lima. *Espaços métricos.*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1983.

[7] M. L. Puri and D. A. Ralescu. Differentials of fuzzy functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 91(2):552–558, 1983.

[8] M. L. Puri and D. A. Ralescu. Fuzzy random variables. *J. Math. Anal. Appl.*, 114(2):409–422, 1986.

[9] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Info. Cont.*, 8(3):338–353, 1965.