Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Gaps entre potências de primos consecutivos

Wendell Palkovitz[1]
Centro Acadêmico da Matemática, Licenciatura em Matemática, UTFPR, Cornélio Procópio, PR
Douglas Azevedo[2]
Departamento Acadêmico da Matemática, Licenciatura em Matemática, UTFPR, Cornélio Procópio, PR
Tiago H. dos Reis[3]
Departamento Acadêmico da Matemática, Licenciatura em Matemática, UTFPR, Cornélio Procópio, PR

O comportamento dos números primos é uma das questões mais interessantes da matemática e muitos grandes matemáticos têm trabalhado sobre esse assunto, por exemplo, D. A. Goldston, J. Pintz, C. Y. Yildirim, J. Maynard, D. H. J. Polymath, Y. Zhang. Em particular, a investigação de diferenças entre números primos consecutivos, ou seja, o comportamento da sequência g_n, definido como $g_n = p_{n+1} - p_n$, para todo o inteiro positivo n, no qual, p_n denota o n-ésimo número primo, este é um dos mais importantes problemas não resolvidos na teoria dos números, assim, com este estudo, conseguimos uma abordagem elementar para lidar com o tema de estimar gaps de potências de primos.

Neste trabalho, vamos apresentar algumas informações sobre a seqüência $\{p_{n+1}^x - p_n^x\}$ em que x é um número real positivo.

Segue nosso principal resultado:

Teorema: Seja $x \in \mathbb{R}$. Para qualquer sequência de termos positivos $\{q_n\}$, vale

$$q_n p_{n+1}^x - q_{n+1} p_n^x < \frac{p_n^x}{p_{n+1}^{1-x}}$$

que nos leva a

$$p_{n+1}^x - p_n^x < \frac{p_n {p_{n+1}}^x}{q_n p_{n+1}} + p_n^x \frac{q_{n+1} - q_n}{q_n}$$

é válida para infinitos valores de n.

O Teorema fornece uma desigualdade geral envolvendo a diferença de números primos e explorando essa desigualdade, para escolhas adequadas de $x \in \mathbb{R}$ podemos obter informações interessantes sobre a sequência $\{p_{n+1}^x - p_n^x\}$.

[1] wendellpalkovitz@outlook.com
[2] douglasa@uftpr.edu.br
[3] threis@uftpr.edu.br

O método para provar este resultado depende de uma extensão do teste de Kummer para convergência de séries de termos positivos [1]. Este teste é, na verdade, uma caracterização teórica de uma série convergente de termos positivos, isto é, fornece condições necessárias e suficientes que garante a convergência de séries de termos positivos. Para obter mais informações sobre o original o Teste de Kummer nos referimos a [3].

Outro resultado importante que desempenha um papel fundamental na prova do Teorema é a divergência bem conhecida da série do recíproco dos números primos $\sum \frac{1}{p_n}$.

A grosso modo, a ideia por trás da prova é combinar a divergência desta série com o argumento contrapositivo de uma extensão do teste de Kummer. Vamos apresentar o resultado que foi utilizado para demonstrar nosso resultado principal.

Lema

Considere a série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ com $\{a_n\}$ $\{c_n\}$ sequência de termos positivos. A série $\sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n$ diverge se, e somente se, existir uma sequência $\{p_n\}$ de números reais positivos e um inteiro positivo N tal que

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \leq c_{n+1}, \ n \geq N.$$

Note que o Lema é a contrapositiva da extensão do teste de Kummer. Além disso, observando a seguinte igualdade divergente de recíproca dos primos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^x} p_n^{x-1}$$

e aplicando no Lema considerando $a_n = \frac{1}{p_n^x}$ e $c_n = p_n^{x-1}$ temos nosso resultado.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Douglas Azevedo e ao Departamento Acadêmico da Matemática da UTFPR.

Referências

[1] W. P. F. Carrijo, L. O. Fernandes and D. Azevedo, Uma extensao para o teste de Kummer: caracterizacao da somabilidade de sequencias positivas, Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, 2017.

[2] D. Azevedo e T.H. dos Reis, Gaps of powers of consecutive primes and some consequences, arXiv, 2018.

[3] J. Tong, Kummer's Test Gives Characterizations for Convergence or Divergence of all Positive Series,The American Mathematical Monthly, Volume 101, 1994.

[4] A. Kourbatov, Upper bounds for prime gaps related to Firoozbakht's conjecture, Journal of Integer Sequences, 2015.