Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Métodos lineares de passo múltiplo para equações diferenciais ordinárias

Paula Neves de Araújo[1]
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística - Universidade de São Paulo - IME/USP
Joyce da Silva Bevilacqua[2]
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada
Instituto de Matemática e Estatística - Universidade de São Paulo - IME/USP

1 Aspectos gerais dos métodos lineares de passo múltiplo

Dada a equação diferencial ordinária $y'(t) = f(t, y), y(t_0) = y_0, t \in [a, b]$, consideramos a forma geral de um método linear de passo múltiplo (MLPM) de m passos, onde y_i representa a aproximação obtida para a solução exata em t_i e f_i equivale a $f(t_i, y_i)$:

$$\sum_{j=0}^{m} \alpha_j \cdot y_{n+j} = h \sum_{j=0}^{m} \beta_j \cdot f_{n+j}. \tag{1}$$

O método será denominado *explícito* se $\beta_m = 0$ e *implícito* caso contrário. Se m for ímpar, a ordem máxima do método será $m+1$ e, se for par, sua ordem máxima será $m+2$.

De acordo com [1], um MLPM é dito *zero-estável* se nenhuma raiz de seu primeiro polinômio característico $\rho(r) = \sum_{j=0}^{3} \alpha_j \cdot r^j$ possui módulo maior que 1 e toda raiz com módulo igual a 1 é simples. Além disso, é *consistente* se a derivada do primeiro polinômio característico for igual ao segundo polinômio característico, quando ambos são calculados em 1. Por fim, para que seja *convergente*, é necessário e suficiente que seja zero-estável e consistente. A região de estabilidade absoluta de um MLPM é o conjunto de valores $\overline{h} \in \mathbb{C}$ tais que as raízes de $\pi(r) = \rho(r) - \overline{h}\sigma(r)$ possuem valor absoluto menor que 1.

Alguns exemplos de MLPMs clássicos são os seguintes:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}) \tag{2}$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{720}(251f_{k+1} + 646f_k - 264f_{k-1} + 106f_{k-2} - 19f_{k-3}) \tag{3}$$

O método (2) é um exemplo de método de Adams-Bashforth (classe de métodos explícitos), enquanto (3) é um método de Adams-Moulton (que são métodos implícitos).

[1]paula.neves.araujo@hotmail.com
[2]joyce@ime.usp.br

2 Construção de MLPMs convergentes de ordem p

Para que o método seja convergente de ordem p (e, consequentemente, consistente, de acordo com [2]) devemos ter $C_0 = ... = C_p = 0$, e $C_{p+1} \neq 0$, com

$$C_q = \frac{1}{q!}\left(\sum_{j=0}^{m} j^q \alpha_j\right) - \frac{1}{(q-1)!}\left(\sum_{j=0}^{m} j^{q-1}\beta_j\right). \tag{4}$$

Para métodos de 3 passos, podemos garantir a zero-estabilidade escolhendo adequadamente as raízes r_s de $\rho(r)$. No exemplo a seguir, tomaremos $r_1 = 1, r_2 = \omega e^{i\theta}, r_3 = \omega e^{-i\theta}$, com $\omega = \frac{1}{2}$ e $\theta = \frac{2\pi}{3}$, ou seja, $r_2 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ e $r_3 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i$. Para que o método seja ótimo, fazemos $C_0 = ... = C_4 = 0$, obtemos $\rho(r) = r^3 - \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}r - \frac{1}{4}$ e:

$$y_{n+3} - \frac{1}{2}y_{n+2} - \frac{1}{4}y_{n+1} - \frac{1}{4}y_n = \frac{35}{96}f_{n+3} + \frac{97}{96}f_{n+2} + \frac{25}{96}f_{n+1} + \frac{11}{96}f_n \tag{5}$$

Na figura abaixo, obtida utilizando $h = 0,002$, podemos ver que a região de estabilidade absoluta de (3) é maior que a de (5):

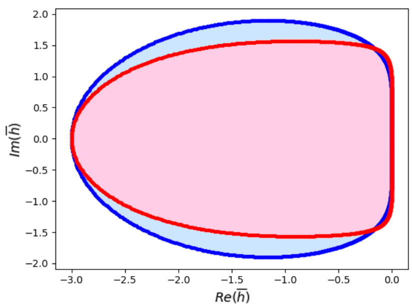

Figura 1: Região de estabilidade absoluta de (5) (em vermelho) e de (3) (em azul).

Apesar disso, essa construção de MLPMs permite o controle do erro de truncamento local, que será limitado, nesse caso, por $|C_5| \cdot M \cdot h^5$, onde $M = max\{|y^{(5)}(t)|, t \in [a,b]\}$ e, conforme (4), $C_5 = -\frac{35}{1440}$. A construção de métodos com regiões de estabilidade absoluta maiores que a dos métodos clássicos é possível e pode ser abordada em trabalhos futuros.

Referências

[1] J.D. Lambert, Computational methods in ordinary differential equations. [S.l]: John Wiley & Sons, 1973.

[2] J. Stoer, R. Bulirsch, Introduction to numerical analysis. New York: Springer-Verlag, 1993.

[3] E. Isaacson, H. B. Keller, Analysis of numerical methods. [S.l]: Courier Corporation, 2012.