Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma extensão do princípio de invariância para sistemas chaveados afins via múltiplas funções auxiliares

Thiago de Souza Pinto[1], Michele Cristina Valentino [2]
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR, Cornélio Procópio, PR
Luís Fernando Costa Alberto[3]
Departamento de Engenharia Elétrica, EESC - USP, São Carlos, SP

Resumo. Este artigo propõe uma extensão do princípio de invariância de LaSalle para sistemas chaveados afins sob chaveamento *dwell-time* arbitrários via múltiplas funções escalares. Os resultados são dados em termos de desigualdades matriciais e são capazes de fornecer estimativas uniformes do conjunto atrator desta classe de sistemas dinâmicos. Exemplos numéricos são apresentados para ilustrar a efetividade da abordagem proposta.

Palavras-chave. Sistemas Chaveados Afins, Atrator, Múltiplas Funções Auxiliares, Princípio de Invariância

1 Introdução

De modo geral, sistemas chaveados são compostos por uma família de subsistemas e uma lei de chaveamento adequada que escolhe, a cada instante de tempo, o subsistema dinâmico que será ativado [2]. Recentemente, temos observado um crescente interesse da comunidade científica no estudo do problema de estabilidade e estabilização de sistemas chaveados, devido a sua capacidade de caracterizar mais adequadamente as variações estruturais de muitos sistemas práticos, como por exemplo sistemas elétricos de potência, controle de sistemas mecânicos, controle de processos, controle de aeronaves, indústria automotiva, eletrônica de potência e muitos outros campos, no seu processo operacional [3].

Muitos avanços na teoria de estabilidade de sistemas chaveados foram obtidos, veja [2], [4] e as referências neles contidas. Dentro do escopo desta teoria, o princípio de invariância tem destaque, possibilitando a análise do comportamento assintótico das soluções destes sistemas. Em [5], foi apresentada uma extensão do princípio de invariância para sistemas chaveados contínuos, a qual forneceu estimativas de conjuntos atratores para a classe de sistemas considerada. As principais contribuições daquele trabalho foram que as derivadas das funções auxiliares, as quais desempenham papel similar às funções de Lyapunov, puderam assumir valores positivos em alguns conjuntos e não foi exigido que todos os subsistemas tivessem o mesmo ponto de equilíbrio, suposição esta muito comum nos resultados de estabilidade existentes na literatura. Neste trabalho, consideramos uma subclasse dos

[1]thiagosp@uftpr.edu.br
[2]valentino@utfpr.edu.br
[3]lfcalberto@usp.br

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0423

sistemas estudados em [5], os sistemas chaveados afins, e então apresentamos resultados em termos de desigualdades matriciais, os quais nos fornecem estimativas dos conjuntos atratores desses sistemas.

2 Extensão do princípio de invariância

No presente artigo, consideramos a seguinte classe de sistemas chaveados

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + b_{\sigma(t)}, \quad x(0) = x_0 \tag{1}$$

em que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ são vetores de estado, $\sigma(t) : [0, \infty[\to \mathcal{P} = \{1, \cdots, \mathcal{N}\}$ é uma função constante por partes, contínua a direita, chamada de lei de chaveamento, e $\mathcal{N}$ é o número de subsistemas. Seja $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de tempos de chaveamento consecutivos associada a lei de chaveamento σ e $I_p = \{t \in [\tau_k, \tau_{k+1}) : \sigma(\tau_k) = p, k \in \mathbb{N}\}$ sendo a união dos intervalos em que o subsistema p é ativo. Uma função contínua, suave por partes, $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$ é uma solução do sistema chaveado afim (1) no intervalo I se $x(t)$ satisfaz $\dot{x}(t) = A_p x(t) + b_p$, $\forall t \in I_p \cap I$ para todo $p \in \mathcal{P}$. Supomos que a sequência de chaveamento $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é divergente e que cada subsistema p estará ativo infinitas vezes. Denotamos $\varphi_{\sigma(t)}(t, x_0)$, ou simplesmente $\varphi(t, x_0)$, a solução do sistema chaveado afim (1) com condição inicial x_0 no tempo $t = 0$ sob a lei de chaveamento $\sigma(t)$.

A seguir algumas definições preliminares, as quais podem ser encontradas em [1] e [2], são apresentadas.

Definição 2.1. *Considere a sequência de tempos de chaveamentos consecutivos $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ associada com $\varphi_{\sigma(t)}(t, x_0)$. A solução $\varphi_{\sigma(t)}(t, x_0)$ tem um dwell-time não nulo se existe $h > 0$ tal que $\inf_k (\tau_{k-1} - \tau_k) \geq h$. O número h é chamado de dwell-time para $\varphi_{\sigma(t)}(t, x_0)$.*

Definição 2.2. *Um conjunto compacto $\mathcal{M}$ é fracamente invariante com respeito ao sistema chaveado (1) se $\forall q \in \mathcal{M}$, existe um índice $p \in \mathcal{P}$ e um número real $c > 0$ tal que $\varphi_p(t, x_0) \in \mathcal{M}$ para qualquer $t \in [-c, 0]$ ou $t \in [0, c]$.*

Para a obtenção da extensão do princípio de invariância consideramos as funções escalares auxiliares $V_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 da seguinte forma:

$$V_p(x) = (x - d)' P_p (x - d), \tag{2}$$

em que $d \in \mathbb{R}^n$ e $P_p \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\forall p \in \mathcal{P}$. Além disso, suponha que

$$\exists P_p = P_p' > 0 \text{ tal que } Q_p = A_p' P_p + P_p A_p < 0, \forall p \in \mathcal{P}. \tag{3}$$

Defina $\mathcal{C}_p = \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V_p(x)(A_p x + b_p) \geq 0\}$ e $\mathcal{C} = \bigcup_{p\in\mathcal{P}} \mathcal{C}_p$. Além disto, utilize as notações $\lambda_{\min}(\cdot)$ e $\lambda_{\max}(\cdot)$ para denotar o menor e maior autovalor de uma matriz real.

O lema a seguir, garante que o conjunto $\mathcal{C}$ será limitado.

Lema 2.1. *Considere o sistema chaveado afim (1) e as funções escalares auxiliares V_p dadas por (2) tal que (3) seja satisfeita. Então o conjunto $\mathcal{C}$ é limitado.*

Demonstração. A derivada da função V_p ao longo da solução do subsistema p é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V}_p(x) = \nabla V_p(x)(A_px + b_p) &= x'Q_px + 2(b_p'P_p - d'P_pA_p)x - 2d'P_pb_p\\ &\leq \lambda_{\max}(Q_p)x'x + 2\left\|b_p'P_p - d'P_pA_p\right\|\|x\| + 2\left|d'P_pb_p\right|\\ &= \lambda_{\max}(Q_p)\|x\|^2 + 2\mu_p\|x\| + 2\xi_p,\end{aligned}$$

onde $\mu_p = \left\|b_p'P_p - d'P_pA_p\right\|$ e $\xi_p = \left|d'P_pb_p\right|$. Desse modo, concluímos que

$$\dot{V}_p(x) \leq \lambda_{\max}(Q_p)\|x\|^2 + 2\mu_p\|x\| + 2\xi_p. \tag{4}$$

Uma vez que (3) é satisfeita $\forall p \in \mathcal{P}$, então $\lambda_{\max}(Q_p) < 0$, logo de (4) pode-se concluir que a derivada é estritamente negativa quando $\|x\| > \frac{-\mu_p - \sqrt{\mu_p^2 - 2\lambda_{\max}(Q_p)\xi_p}}{\lambda_{\max}(Q_p)}$. Assim $C_p \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \|x\| \leq -\frac{\mu_p + \sqrt{\mu_p^2 - 2\lambda_{\max}(Q_p)\xi_p}}{\lambda_{\max}(Q_p)}\right\}$. Portanto, $C = \bigcup_{p\in\mathcal{P}} C_p \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \|x\| \leq z\}$, onde

$$z = \max_{p\in\mathcal{P}}\left\{-\frac{\mu_p + \sqrt{\mu_p^2 - 2\lambda_{\max}(Q_p)\xi_p}}{\lambda_{\max}(Q_p)}\right\}, \tag{5}$$

ou seja, o conjunto $\mathcal{C}$ é limitado. □

O lema a seguir, garante a existência de funções que limitam inferiormente e superiormente as múltiplas funções escalares auxiliares V_p dadas por (2).

Lema 2.2. *Considere o sistema chaveado afim* (1) *e as múltiplas funções auxiliares* V_p *dadas por* (2) *tal que* (3) *seja satisfeita. Então, existem funções contínuas* $\alpha, \beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tais que*

$$\alpha(x) \leq V_p(x) \leq \beta(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall p \in \mathcal{P}. \tag{6}$$

Demonstração. Nesta prova iremos mostrar que existem funções contínuas $\alpha, \beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfazendo (6) exibindo um caso particular para cada uma delas. Uma vez que P_p é simétrica, definida positiva para todo $p \in \mathcal{P}$, então

$$\begin{aligned}V_p(x) &\leq \lambda_{\max}(P_p)(x-d)'(x-d)\\ &= (x-d)'\text{diag}[\lambda_{\max}(P_p), \cdots, \lambda_{\max}(P_p)](x-d), \quad \forall p \in \mathcal{P} \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}^n.\end{aligned} \tag{7}$$

Definindo a matriz $\overline{P}_M = \text{diag}[\delta_{max}, \cdots, \delta_{max}]$, com $\delta_{max} = \max_{p\in\mathcal{P}}\{\lambda_{\max}(P_p)\}$ e utilizando (7) temos

$$V_p(x) \leq (x-d)'\overline{P}_M(x-d), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \forall p \in \mathcal{P}. \tag{8}$$

Assim, considerando $\beta(x) = (x-d)'\overline{P}_M(x-d)$, de (8) temos que $V_p(x) \leq \beta(x), \quad \forall p \in \mathcal{P}$ e $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Ainda, utilizando a hipótese (3) e definindo a matriz $\overline{P}_m = \text{diag}[\delta_{min}, \cdots, \delta_{min}]$, com $\delta_{min} = \min_{p\in\mathcal{P}}\{\lambda_{\min}(P_p)\}$, temos

$$\begin{aligned}V_p(x) &\geq \lambda_{\min}(P_p)(x-d)'(x-d)\\ &= (x-d)'\text{diag}[\lambda_{\min}(P_p), \cdots, \lambda_{\min}(P_p)](x-d)\\ &\geq (x-d)'\overline{P}_m(x-d), \quad \forall p \in \mathcal{P} \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}^n.\end{aligned} \tag{9}$$

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0423

De (9) temos que $V_p(x) \geq (x-d)'\overline{P}_m(x-d), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall p \in \mathcal{P}$. Assim, considerando $\alpha(x) = (x-d)'\overline{P}_m(x-d)$, da desigualdade anterior temos que $V_p(x) \geq \alpha(x)$, $\forall p \in \mathcal{P}$ e $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Portanto, as funções $\alpha(x) = (x-d)'\overline{P}_m(x-d)$ e $\beta(x) = (x-d)'\overline{P}_M(x-d)$ são uma possível escolha de funções satisfazendo (6). □

Considerando funções contínuas $\alpha, \beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfazendo (6), são definidos os conjuntos: $\Omega_{\ell_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) \leq \ell_0\}$, $\Omega_{\ell_j} = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) \leq \ell_j\}$, e $\Theta = \{x \in \mathbb{R}^n : \beta(x) \leq \ell_0,\}$ com $\sup\limits_{x \in \mathcal{C}} \beta(x) < \ell_0 < \infty$ e $\sup\limits_{x \in \Omega_{\ell_{j-1}}} \beta(x) \leq \ell_j < \infty, \quad j \in \{1, \cdots, \mathcal{N}+1\}$, os quais satisfazem:

$$\mathcal{C} \subset \Theta \subseteq \Omega_{\ell_0} \subseteq \Omega_{\ell_1} \subseteq \cdots \subseteq \Omega_{\ell_j} \subseteq \Omega_{\ell_{j+1}} \cdots \subseteq \Omega_{\ell_{\mathcal{N}+1}}. \tag{10}$$

O próximo lema permite estimar os valores de $\ell_0, \cdots, \ell_{\mathcal{N}+1}$ e as respectivas regiões $\mathcal{C}$, Θ e Ω_{ℓ_j}, $\forall j \in \{0, 1, \ldots, \mathcal{N}+1\}$.

Lema 2.3. *Considere o sistema chaveado afim* (1) *e as múltiplas funções auxiliares* V_p *dadas por* (2) *tal que* (3) *seja satisfeita. Além disto, sejam* α *e* β *funções definidas por* $\alpha(x) = (x-d)'P_m(x-d)$ *e* $\beta(x) = (x-d)'P_M(x-d)$*, onde* $P_m, P_M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *são matrizes positivas, então:*

(i) Se $\ell_0 > \lambda_{\max}(P_M)\,(z + \|d\|)^2$ *então* $\mathcal{C} \subset \Theta \subseteq \Omega_{\ell_0}$ *em que* z *é dado por* (5).

(ii) Dado ℓ_0 *tal que* $\mathcal{C} \subset \Theta \subseteq \Omega_{\ell_0}$*, então* $\Omega_{\ell_{j-1}} \subseteq \Omega_{\ell_j}, \quad \forall j \in \{1, \ldots, \mathcal{N}+1\}$*, se* $\ell_j \geq \dfrac{\lambda_{\max}(P_M)}{\lambda_{\min}(P_m)}\ell_{j-1}$.

Demonstração. (i) Inicialmente, observamos que devido ao Lema 2.1 é verdadeira a inclusão $\mathcal{C} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \|x-d\| \leq z\}$ para z dado por (5). Assim, ao analisar os valores numéricos que a função contínua $\beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dada por $\beta(x) = (x-d)'\,P_M\,(x-d)$, assume quando $x \in \mathcal{C}$, obtemos:

$$\beta(x) \leq \lambda_{\max}(P_M)\,\|x-d\|^2 \leq \lambda_{\max}(P_M)\,(\|x\| + \|d\|)^2 \leq \lambda_{\max}(P_M)\,(z + \|d\|)^2, \forall x \in \mathcal{C}.$$

Desse modo, escolhendo $\ell_0 \in \mathbb{R}$, da forma $\ell_0 > \lambda_{\max}(P_M)\,(z + \|d\|)^2$, concluímos que $\mathcal{C} \subset \Theta$. Portanto, pela construção do conjunto Ω_{ℓ_0}, temos que $\mathcal{C} \subset \Theta \subseteq \Omega_{\ell_0}$.

(ii) A prova será por indução sobre o índice $j \in \{1, \cdots, \mathcal{N}+1\}$. Para $N = 1$, podemos mostrar que $\Omega_{\ell_0} \subseteq \Omega_{\ell_1}$ quando $\ell_1 \geq \dfrac{\lambda_{\max}(P_M)}{\lambda_{\min}(P_m)}\ell_0$. De fato, se $x \in \Omega_{\ell_0}$ então $\lambda_{min}(P_m)||x-d||^2 \leq \alpha(x) \leq \ell_0, \forall x \in \Omega_{\ell_0}$. Então, $\|x-d\|^2 \leq \left(\frac{\ell_0}{\lambda_{\min}(P_m)}\right)$, $\forall x \in \Omega_{\ell_0}$. Analisando os valores numéricos que a função $\beta(x) = (x-d)'\,P_M\,(x-d)$ assume quando $x \in \Omega_{\ell_0}$, obtemos

$$\beta(x) \leq \lambda_{\max}(P_M)\,\|x-d\|^2 \leq \lambda_{\max}(P_M)\left(\frac{\ell_0}{\lambda_{\min}(P_m)}\right) \leq \frac{\lambda_{\max}(P_M)}{\lambda_{\min}(P_m)}\ell_0, \quad \forall x \in \Omega_{\ell_0}.$$

Assim, definindo $\ell_1 \geq \dfrac{\lambda_{\max}(P_M)}{\lambda_{\min}(P_m)}\ell_0$, temos que $\Theta \subseteq \Omega_{\ell_0} \subseteq \Omega_{\ell_1}$ pois $\sup\limits_{x \in \Omega_{\ell_0}} \beta(x) \leq \ell_1 < \infty$ está verificado.

Como hipótese de indução, assumimos que o resultado é válido para $\mathcal{N}$ subsistemas, $\{1, \cdots, \mathcal{N}\}$, ou seja, os números reais $\ell_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell_j \geq \dfrac{\lambda_{\max}(P_M)}{\lambda_{\min}(P_m)}\ell_{j-1}$, $j \in \{1, \ldots, \mathcal{N}\}$, garantem que $\Omega_{\ell_0} \subseteq \Omega_{\ell_1} \subseteq \cdots \subseteq \Omega_{\ell_{\mathcal{N}-1}} \subseteq \Omega_{\ell_{\mathcal{N}}}$. Agora, vamos provar o resultado para $\mathcal{N}+1$. Para todo $x \in \Omega_{\ell_{\mathcal{N}}}$ temos $\|x-d\|^2 \leq \left(\frac{\ell_{\mathcal{N}}}{\lambda_{\min}(P_m)}\right)$. Assim, analisando os valores numéricos que a função β assume quando $x \in \Omega_{\ell_{\mathcal{N}}}$, obtemos

$$\beta(x) \leq \lambda_{\max}(P_M)\,\|x-d\|^2 \leq \left[\tfrac{\lambda_{\max}(P_M)}{\lambda_{\min}(P_m)}\right]\ell_N, \quad \forall x \in \Omega_{\ell_{\mathcal{N}}}.$$

Então, escolhendo $\ell_{\mathcal{N}+1} \geq \dfrac{\lambda_{\max}(P_M)}{\lambda_{\min}(P_m)}\ell_{\mathcal{N}}$, temos que $\Omega_{\ell_{\mathcal{N}}} \subseteq \Omega_{\ell_{\mathcal{N}+1}}$.

□

Vamos considerar sobre as múltiplas funções auxiliares V_p, $p \in \mathcal{P}$, a seguinte suposição.

Suposição 2.1. *Para todo par de tempos de chaveamentos consecutivos $\tau_h < \tau_j$ tal que $\sigma(\tau_h) = \sigma(\tau_j) = p$, vale $V_p(\varphi(\tau_h, x_0)) > V_p(\varphi(\tau_j, x_0))$, se $\varphi(\tau_h, x_0) \notin \Theta$ e $\varphi(\tau_j, x_0) \notin \Theta$.*

O próximo lema garante que toda solução do sistemas chaveado afim (1) sob chaveamento *dwell-time* arbitrário é limitada.

Lema 2.4. *Considere o sistema chaveado afim* (1)*, as funções escalares V_p dadas por* (2) *tal que* (3) *seja satisfeita. Além disto, suponha que a Suposição 2.1 seja satisfeita. Então, toda solução $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, é limitada.*

Demonstração. Seja $\ell_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\ell_0 > \lambda_{\max}(P_M)\,(z + \|d\|)^2$ em que z é dado por (5). Seja $x_0 \in \Omega_{\ell_0}$, então pelo Lema 3 em [5], temos que toda solução $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ permanece em $\Omega_{\ell_{\mathcal{N}+1}}$, para todo $t \geq 0$, ou seja, a solução $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ é limitada.

Agora, considere que $x_0 \notin \Omega_{\ell_0}$ e $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$. Seja $L_0 \in \mathbb{R}$, tal que $\sup_{x \in \mathcal{C}} \beta(x) < \ell_0 < L_0$ e $x_0 \in \Omega_{L_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) \leq L_0\}$. Definindo os conjuntos $\Omega_{L_j} = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) \leq L_j\}$ onde $\sup\limits_{x \in \Omega_{L_{j-1}}} \beta(x) \leq L_j < \infty, \quad j \in \{1, \cdots, \mathcal{N}+1\}$ obtemos as seguintes inclusões $\mathcal{C} \subset \Theta \subseteq \Omega_{L_0} \subseteq \Omega_{L_1} \subseteq \cdots \subseteq \Omega_{L_j} \subseteq \Omega_{L_{j+1}} \cdots \subseteq \Omega_{L_{\mathcal{N}+1}}$. Devido as múltiplas funções V_p dadas por (2) e a Suposição 2.1, é possível utilizar novamente o Lema 3 em [5] para garantir que se $x_0 \in \Omega_{L_0}$, então $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ permanece em $\Omega_{L_{\mathcal{N}+1}}$ para todo $t \geq 0$, ou seja, a solução $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ com $x_0 \notin \Omega_{\ell_0}$ é limitada. □

Explorando os resultados anteriores, a seguinte extensão do princípio de invariância para sistemas chaveados afins via múltiplas escalares auxiliares é estabelecida.

Teorema 2.1. *Considere o sistema chaveado afim* (1)*, as funções escalares V_p dadas por* (2) *tal que* (3) *seja satisfeita. Ainda suponha que a Suposição 2.1 seja satisfeita. Então, toda solução de* (1)*, $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ é atraída para o maior conjunto fracamente invariante de $\Omega_{\ell_{\mathcal{N}+1}}$.*

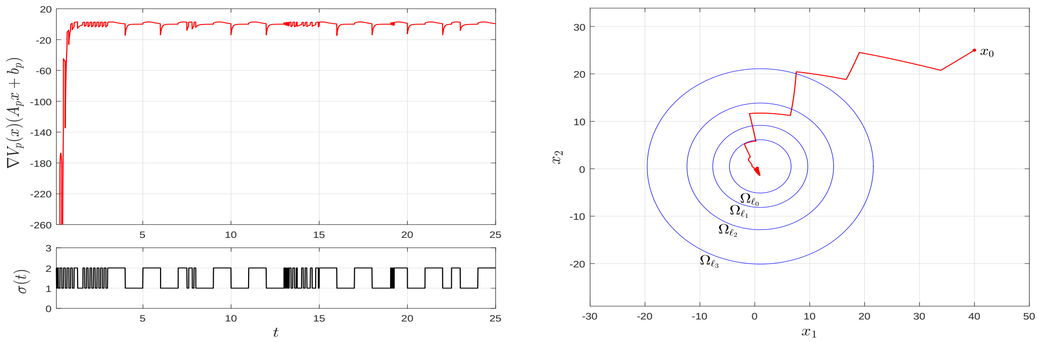
Demonstração. Considere que $x_0 \in \Theta$ e $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$. Como, por hipótese, a Suposição 2.1 e as desigualdades (2) e (3) são satisfeitas, então pelos Lemas 2.4 e Lema 3 em [5], tem-se que a solução $\varphi(t, x_0)$ é limitada, e ainda $\varphi(t, x_0)$ permanece dentro de $\Omega_{\ell_{\mathcal{N}+1}}$ para todo $t \geq 0$. Portanto, pela Proposição 2 do artigo [1], a solução será atraída para um conjunto fracamente invariante em $\Omega_{\ell_{\mathcal{N}+1}}$.

Agora, seja $x_0 \notin \Theta$ e suponha por absurdo que a solução $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ não entra em Θ. Considere a sequência de tempos de chaveamento $\{\tau_{k_p}\}$ a qual o subsistema p vem a ser ativo, isso é, $\sigma(\tau_{k_p}) = p$. Da Suposição 2.1, temos que a sequência $V_p(\varphi(\tau_{k_p}, x_0))$ é uma sequência de números reais limitada inferiormente. Então $V_p(\varphi(\tau_{k_p}, x_0)) \to r_p$ quando $k \to +\infty$ para todo $p \in \mathcal{P}$. Uma vez que $\varphi(t, x_0)$ é limitado (veja Lema 2.4), então pela Proposição 2 em [1], $\omega^+(x_0)$ é não vazio e fracamente invariante. Seja $c \in \omega^+(x_0)$, então existe uma sequência $\{t_j\}$ tal que $\varphi(t_j, x_0) \to c$ quando $j \to \infty$. Como o conjunto $\mathcal{P}$ é finito, existe ao menos um índice $\overline{p} \in \mathcal{P}$ e uma subsequência $\{t_{j_i}\}$ tal que $t_{j_i} \in I_{\overline{p}}$. Então, $V_{\overline{p}}(\varphi(t_{j_i}, x_0)) \to V_{\overline{p}}(c) = r_{\overline{p}}$ para todo $c \in \omega^+(x_0)$. Como na demonstração da Proposição 2 em [1], podemos provar a existência de um intervalo $[\epsilon, \gamma]$ contendo a origem e funções $\upsilon_j(t) = \varphi(t + t_j)$ definidas sobre $[\epsilon, \gamma]$, satisfazendo a seguinte propriedade: $\upsilon_j(t)$ converge uniformemente para $\upsilon(t)$ em $[\epsilon, \gamma]$, $\upsilon(t) \subset \omega^+(x_0)$ para todo $t \in [\epsilon, \gamma]$, $\dot{\upsilon}(t) = f_{\overline{p}}(\upsilon(t))$ e $\upsilon(0) = c$. Então $V_{\overline{p}}(\upsilon(t)) = r_{\overline{p}}$ e $\nabla V_{\overline{p}}(\upsilon(t)) f_{\overline{p}}(\upsilon(t)) = 0$ para todo $t \in [\epsilon, \gamma]$. Particularmente, para $t = 0$, $\nabla V_{\overline{p}}(\upsilon(0)) f_{\overline{p}}(\upsilon(0)) = \nabla V_{\overline{p}}(c) f_{\overline{p}}(c) = 0$, então $c \in \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V_p(x)(A_p x + b_p) = 0\}$ e $\omega^+(x_0) \subset \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V_p(x)(A_p x + b_p) = 0\} \subseteq \Theta$. O conjunto $\omega^+(x_0)$ é fracamente invariante, então a solução é atraída para o maior conjunto fracamente invariante em $\{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V_p(x)(A_p x + b_p) = 0\}$, o que é uma contradição pois $\{x \in \mathbb{R}^n : \nabla V_p(x)(A_p x + b_p) = 0\} \subseteq \Theta$. Portanto, existe algum $T \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(T, x_0) \in \Theta$ e então o resultado segue da primeira parte dessa demonstração.

Portanto, a solução $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ é atraída para o maior conjunto fracamente invariante em $\Omega_{\ell_{\mathcal{N}+1}}$. $\square$

3 Exemplo Numérico

O Teorema 2.1 será explorado para obter uma estimativa do conjunto atrator do sistema chaveado afim (1) com $\mathcal{P} = \{1, 2\}$ sendo $A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}'$ e $b_2 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \end{bmatrix}'$. Com o auxílio do software Matlab junto dos pacotes Yalmip e Sedumi, obtemos $P_1 = \begin{bmatrix} 0,6507 & 0,1375 \\ 0,1375 & 0,3493 \end{bmatrix}$ e $P_2 = \begin{bmatrix} 0,1133 & 0,0688 \\ 0,0688 & 0,3475 \end{bmatrix}$ que satisfazem (3) e permite considerarmos as funções escalares auxiliares (2). Escolhendo o vetor $d = [0,5 \;\; 1]'$, o Lema 2.3 garante que $\mathcal{C} \subset \Theta \subseteq \Omega_{\ell_0} \subseteq \Omega_{\ell_1} \subseteq \Omega_{\ell_2} \subseteq \Omega_{\ell_3}$ onde $\ell_0 = 9,3252$, $\ell_1 = 22,1834$, $\ell_2 = 52,7716$, $\ell_3 = 125,5371$, $P_M = \begin{bmatrix} 0,7040 & 0 \\ 0 & 0,7040 \end{bmatrix}$ e $P_m = \begin{bmatrix} 0,2960 & 0 \\ 0 & 0,2960 \end{bmatrix}$. Assim, pelo Teorema 2.1, toda solução limitada $\varphi(t, x_0) \in \mathcal{S}_{dwell}$ é atraída para um conjunto fracamente invariante em Ω_{ℓ_3}, onde $vol(\Omega_{\ell_3}) = 1332,6 \; u.v$, isto é, o atrator deste sistema chaveado afim sob chaveamento arbitrário está contido no elipsoide Ω_{ℓ_3}. A Figura 1 ilustra a simulação no domínio do tempo para a condição inicial $x_0 = [40 \;\; 25]'$ e o chaveamento *dwell-time* com $h = 0,05s$.



(a) (b)

Figura 1: (a) Gráfico da derivada ao longo da solução do sistema chaveado e do sinal de chaveamento $\sigma(t)$ com *dwell-time* $h = 0,05s$. (b) Plano de fase com $x_0 = [40 \;\; 25]'$ e estimativa do conjunto atrator Ω_{ℓ_3}.

4 Conclusões

Neste trabalho, uma extensão do princípio de invariância para sistemas chaveados afins sob chaveamento *dwell-time* arbitrário foi demonstrada. Conforme pode ser observado no exemplo numérico, este resultado é útil para obter estimativas de conjuntos atratores de sistemas chaveados afins. Notamos que as estimativas obtidas dependem das matrizes $P_M > 0$, $P_m > 0$, $P_p > 0$, $p \in \mathcal{P}$ e do vetor d. No intuito de melhorar as estimativas obtidas para o conjunto atrator de sistemas chaveados afins, atualmente estamos buscando encontrar alguma ferramenta matemática que forneça uma maneira sistemática de se obter melhores estimativas do conjunto atrator de sistemas chaveados afins.

Referências

[1] A. Bacciotti and L. Mazzi. An invariance principle for nonlinear switched systems. *Syst. Control Lett.* , 54:1109-1119, 2005. DOI:10.1016/j.sysconle.2005.04.003

[2] D. Liberzon. *Switching in Systems and Control*, Birkhäuser Basel, 2003.

[3] H. Lin and P. J. Antsaklis. Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 54:308-322, 2009. DOI 10.1109/TAC.2008.2012009.

[4] Z. Sun and S.S. Ge. *Stability Theory of Switched Dynamical Systems*, Springer London, Series Communications and Control Engineering, 2011. ISBN: 9780857292568.

[5] M.C. Valentino, and V.A. Oliveira, and L.F.C. Alberto, and D.S. Azevedo. An extension of the invariance principle for dwell-time switched nonlinear systems, *Syst. Control Lett.*, 61:580-586, 2012. DOI:10.1016/j.sysconle.2012.02.007.

