Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Integrais de Riemann e Lebesgue

Mariana Silva[1]
Instituto de Ciências Exatas, UFF, Volta Redonda, RJ
Alan Prata[2]
Instituto de Ciências Exatas, UFF, Volta Redonda, RJ

1 Resumo

O método da exaustão para calcular áreas e volumes de figuras geométricas complicadas, por meio de áreas e volumes de figuras mais simples é conhecido desde a Grécia antiga e esta é a ideia chave do que chamamos Cálculo Infinitesimal. No século XVII, esta ideia foi aperfeiçoada por Newton e Leibniz, fornecendo a estrutura do que é conhecido atualmente por Cálculo Integral, porém, apenas com o trabalho posterior de Riemann, no século XIX, o conceito de integral foi estabelecido com bases rigorosas e tornou-se instrumento para resolução de inúmeros problemas.

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, a integral de Riemann $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$ equivale a noção de área sob a curva, e é definida a partir de aproximações em que o domínio é dividido em pequenas partes.

Apesar de útil, a integral de Riemann contém certas deficiências que a tornam inadequada para algumas aplicações. Um dos maiores problemas nessa teoria é a passagem ao limite sob o sinal de integral, isto é, dada uma sequências de funções (f_n) convergente em (a, b), quando podemos garantir que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n\,dx?$$

Na integral de Riemann, isto só possível no caso particular em que uma sequência de funções contínuas converge uniformemente.

Para superar as deficiências no conceito anterior, no início do século XX, nasce a teoria da medida e integração com Henri Lebesgue. Dado um conjunto Ω e uma função (mensurável em uma σ-álgebra de Ω), $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$, a ideia da integral de Lebesgue também é usar aproximações. Porém, como não há uma forma razoável de dividir o domínio em pequenas partes, o que se faz é dividir o contra-domínio.

---

[1]silvamariana@id.uff.br
[2]alanprata@id.uff.br

Definition 1.1 (Integral de Lebesgue)**.** *Uma função é simples se é combinação linear de funções características de conjuntos em* Ω, $\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}$. *Se* $\mu(E_j)$ *representa a "medida" do conjunto* E_j *em* Ω, *definimos a integral de* φ *como*

$$\int_\Omega \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j).$$

Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *uma função não-negativa (mensurável), definimos a integral de Lebesgue de* f *por*

$$\int_\Omega f d\mu = \sup \int_\Omega \varphi d\mu,$$

onde o supremo é tomado sobre todas as funções simples tais que $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$, *para todo* $x \in \Omega$.

A integral de Lebesgue supera as dificuldades encontradas pela integral de Riemann. Ela admite um conjunto muito mais amplo de funções integráveis, torna possível a passagem ao limite sob o sinal de integral sob condições muito mais gerais (Teorema da Convergência Monótona, Teorema da Convergência Dominada), além de permitir construir espaços de funções que são completos (espaços L_p).

Por suas boas qualidades, a noção de medida e integral de Lebegue tornou-se um conceito unificador e tem sido um ingrediente indispensável em diversas áreas da matemática, incluindo teoria da probabilidade, equações diferenciais parciais, análise funcional e sistemas dinâmicos. O objetivo desse estudo é apresentar a teoria de medida e integração de Lebesgue e, principalmente, discutir sua importância para a teoria da probabilidade.

References

[1] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library, 1995.

[2] H. L. Royden, *Real Analysis*, fourth edition, Pearson, 2015.

[3] H. L. Guidorizzi, *Um Curso de Cálculo*, volume 1, LTC, 2001.

[4] E. L. Lima, *Análise Real*, volume 1, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2006.

[5] L. A. Medeiros; E. A. de Mello, *A Integral de Lebesgue*, Instituto de Matemática - UFRJ, 2008.