Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 2, N. 1, 2014.
Trabalho apresentado no CMAC-Sul, Curitiba-PR, 2014.

Aplicação de Série de Fourier na Forma Exponencial a sistemas LCIT

Renan C. Spadim* **André L. M. Martinez** **Glaucia M. Bressan**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
86300-000, Cornélio Procópio, PR
E-mail: renan.spadim@hotmail.com, andrelmmartinez@yahoo.com.br, glauciabressan@utfpr.edu.br

RESUMO

A teoria de Fourier é muito utilizada nas ciências em geral, principalmente nas areas que envolvem Matemática, Engenharia, Computação, Musica, Ondulatória e Sinais Digitais. Neste trabalho, desenvolvemos a série de Fourier para sua forma exponencial e apresentamos uma aplicação desta para o estudo do sinal de saída de um Sistema Linear Contínuo Invariante no Tempo (LCIT). Durante o estudo da série de fourier, observamos como a teoria torna-se mais atraente quando apresentada visando também sua aplicação. Esta é a pretensão deste estudo, que está em andamento, e prevê também o estudo de transformadas integrais e suas aplicações.

Seja f uma função definida no intervalo $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$, $T_0 > 0$, e fora deste intervalo definida como $f(x) = f(t + T_0)$, ou seja, $f(t)$ é T_0- periódica. Do teorema de Fourier (recomendamos [1], [2]) para f e f' seccionalmente contínuas, a série trigonométrica

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n\omega_0 t\right) + b_n \sin\left(n\omega_0 t\right)\right], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \tag{1}$$

onde a_0, a_n e b_n são os coeficientes de Fourier (definidos por: $a_0 = \dfrac{2}{T_0}\displaystyle\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)dt$, $a_n = \dfrac{2}{T_0}\displaystyle\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos\left(n\omega_0 t\right) dt$ e $b_n = \dfrac{2}{T_0}\displaystyle\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\sin\left(n\omega_0 t\right) dt$), é convergente para o limite

$$\widetilde{f}(t) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to t^+} f(x) + \lim_{x\to t^-} f(x)\right)$$

Vamos reescrever a série de Fourier utilizando a exponencial complexa. Para isso, precisamos da fórmula de Euler, a qual diz que $e^{j\theta} = \cos\theta + j\text{sen}\theta$, onde $j^2 = -1$. Desta forma, podemos escrever

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \quad e \quad \text{sen}\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}. \tag{2}$$

Utilizando as equações em (2) podemos reescrever o argumento da série (1) da seguinte forma.

$$a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t}.$$

Consideremos $c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$, logo

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt, \tag{3}$$

*Bolsista CNPq do Projeto ”‘Forma Engenharia”

Podemos observar $c_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)dt = \frac{a_0}{2}$. Portanto, a série definida em (1) é reescrita como

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \tag{4}$$

a expressão acima é denominada série de Fourier na forma exponencial.

Vamos utilizar a série de Fourier exponencial para obter o sinal de saída de um retificador de onda (recomendamos [3], [4]), a partir de um sinal de entrada $x(t)$.

Existe uma grande conexão entre sistemas LCIT (recomendamos [3]) com a série de Fourier na forma exponencial. A resposta do estado nulo de um sistema LCIT com entrada de um sinal exponencial infinito é também um sinal exponencial infinito. De fato se $h(t)$ é a função transferência para o impulso unitário a resposta do sistema $y(t)$ será dada pela convolução

$$\begin{aligned} y(t) &= h(t) * e^{st} = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{s(t-u)}du \\ &= e^{st} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-su}du}_{H(s).} \end{aligned}$$

$H(s)$ está definida apenas na região do plano onde a integral imprópria que a define é convergente, tal região é chamada de região de convergência de $H(s)$.

Consideremos $x(t)$ um sinal periódico de período T_0; então este sinal pode ser descrito pela série de Fourier na forma exponencial como

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}, \text{ onde } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}.$$

Para um sistema LCIT com função de transferência $H(s)$, a saída para um sinal de entrada exponencial é

$$\underbrace{e^{j\omega_0 t}}_{\text{entrada}} \rightarrow \underbrace{H(j\omega_0)e^{j\omega_0 t}}_{\text{saída.}},$$

A partir da linearidade obtemos 5

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}}_{\text{entrada } x(t)} \rightarrow \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H(jn\omega_0)e^{jn\omega_0 t},}_{\text{resposta } y(t),} \tag{5}$$

onde c_n é dado por (3).

Desta forma a resposta $y(t)$ se mantém como um sinal periódico; além disso, a resposta tem o mesmo período que a entrada $x(t)$. Consideremos o circuito da Figura 1, onde R representa a resistência em Ω e C a capacitância em F.

A equação de malha para este circuito fechado do filtro RC é $Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)dt = x(t)$. E a função de transferência é dada por $H(j\omega) = \frac{1}{RCj\omega + 1}$. Logo de (5) para $\omega = n\omega_0$ o sinal de saída do retificador pode ser expresso por

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{RCjn\omega_0 + 1} e^{jn\omega_0 t}.$$

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0032

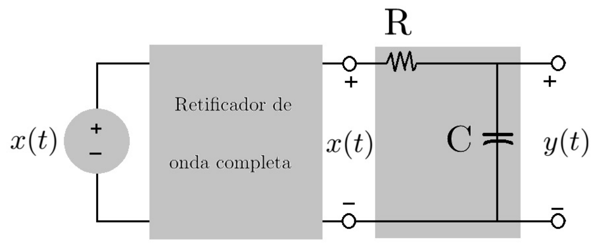

Figura 1: Retificador de onda completa com filtro passa-baixa.

Para $x(t) = \text{sen}(t)$ e $T_0 = \pi$ encontramos

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}(t)e^{-j2nt}dt = \frac{2}{\pi(1-4n^2)},\ n \neq 0 \tag{6}$$

e $c_0 = 2/\pi$, obtemos então o sinal de saída

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4n^2)(2RCnj+1)}e^{2jnt}.$$

Na Figura 2 apresentamos os gráficos dos sinais de entrada e saída para $R = 20\Omega$ e $C = \frac{1}{10}F$. Com a solução encontrada, podemos analisar exatamente qual será a saída do circuito e, com essa

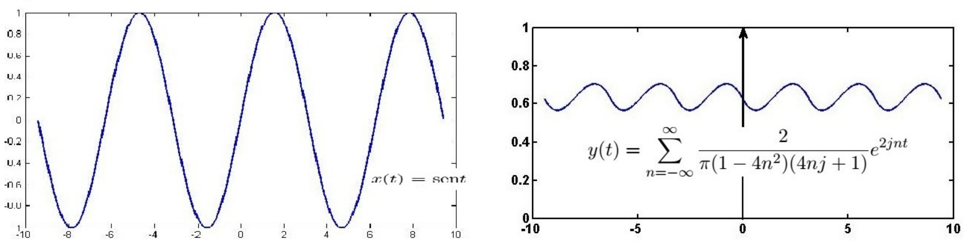

Figura 2: Ilustração do sinal de entrada e saída respectivamente.

informação, podemos prever se o equipamento que será ligado ao filtro irá funcionar da forma esperada, por exemplo. Na Figura 2 apresentamos os gráficos referentes aos sinais de entrada e saída para um circuito LCIT com resistência de valor $R = 20\Omega$ e capacitância $C = \frac{1}{10}F$.

Palavras-chave: *Série de Fourier, Sinais Periódicos, Forma exponencial*

Referências

[1] D. G. Figueiredo, Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais, *Coleção Euclides, IMPA/CNPq*, Rio de Janeiro,1986.

[2] W. E. Boyce; R. C. Diprima, Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, *Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.*, 9ª ed., Rio de Janeiro, 2010.

[3] B. P. Lathi; B. V. Veen, Sinais e Sistema Lineares, *Bookman*, 2ª ed. Porto Alegre, 2007.

[4] S. Haykin, B. V. Veen, Sinais e Sistemas, *Bookman*, Porto Alegre, 2001.

