Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Análise de convergência de métodos proximais para soluções eficientes em otimização multiobjetivo convexa

Rogério Azevedo Rocha[1]
Curso de Ciênca da Computação, UFT, Palmas, TO
Ronaldo Malheiros Gregório[2]
Departamento de Tecnologia e Linguagens, UFRRJ, Rio de Janeiro, RJ
Michael Souza[3]
Departamento de Estatística e Matemática Aplicada, UFC, Ceará, CE

Resumo. Recentemente Rocha et al. construíram um método de escalarização proximal para problemas de otimização multiobjetivo irrestrito e convexo, onde os autores provam a convergência do método para soluções fracamente eficientes. Dado que em aplicações reais é frequente o caso em que apenas soluções eficientes (em vez de fracamente eficientes) são de interesse, neste trabalho investigamos a convergência do método de Rocha et al. para soluções eficientes.

Palavras-chave. Otimização Multiobjetivo, Algoritmo Proximal, Quase-distância, Solução eficiente

1 Introdução

Este trabalho considera o problema de otimização multiobjetivo (POM) irrestrito

$$\text{MINIMIZE } \{F(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \tag{1}$$

onde $F = (F_1, F_2, ..., F_m)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ satisfaz as seguintes hipóteses: $(\mathcal{H}\mathbf{1})$ F é convexa e $(\mathcal{H}\mathbf{2})$ F possui pelo menos uma de suas funções objetivo coerciva, i.e., existe $r \in \{1, ..., m\}$ tal que $\lim F_r(x) = +\infty$ quando $\|x\| \to +\infty$.

A importância da otimização multiobjetivo pode ser conferida em uma grande variedade de aplicações presentes na literatura. White [8] oferece uma bibliografia de 504 artigos descrevendo várias aplicações que abordam, por exemplo, problemas relacionados à agricultura, serviços bancários, serviços de saúde e energia. Mais informações, com respeito a otimização multiobjetivo, podem ser conferidas na Seção 2 e Mitettinen [3].

Gregório e Oliveira [1] apresentaram um método de escalarização ponto proximal para o problema (1). Neste trabalho os autores provam a convergência do método para soluções fracamente eficientes. Este método de Gregório e Oliveira foi generalizado por Rocha et

[1]azevedo@uft.edu.br
[2]rgregor@ufrrj.br
[3]michael@ufc.br

al. [6] onde foi considerado uma quase-distância em substituição ao termo quadrático do método de Gregório e Oliveira. Assim como Gregório e Oliveira, Rocha et al. provam a convergência de seu método para soluções fracamente eficientes.

Neste trabalho, mostraremos que o método proximal de Rocha et al. [6] converge para soluções eficientes. Neste sentido, concluímos também que o mesmo ocorre com o algoritmo de Gregório e Oliveira [1].

A principal justificativa da importância deste trabalho é que, em aplicações reais é frequente o caso em que apenas soluções eficientes são de interesse (ver, por exemplo, Seção 2.3 em [2]). Portanto, como para os métodos de Gregório e Oliveira [1] e Rocha et al. [6] é garantido somente convergência para soluções fracamente eficientes, nosso trabalho estende estes trabalhos anteriores em relação ao conceito de solução.

2 Preliminares

Nesta Seção recordaremos algumas propriedades dos subdiferenciais Fréchet e limite e da aplicação quase-distância. Além disto, faremos uma breve revisão da programação multiobjetivo. Mais detalhes podem ser conferidos em [3], [4] e [7].

Definição 2.1. *Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ e $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função própria e semicontínua inferior.*

a) O ***subdiferencial Fréchet*** *de h em $x, \hat{\partial} h(x)$, é dado por:*

$$\hat{\partial} h(x) := \begin{cases} \left\{ x^* \in \mathbb{R}^n \mid \liminf\limits_{y \neq x, y \to x} \dfrac{h(y) - h(x) - \langle x^*, y - x \rangle}{\|x - y\|} \geq 0 \right\}, & se\ x \in dom(h) \\ \emptyset, & se\ x \notin dom(h) \end{cases}$$

b) O ***subdiferencial-limite*** *de h em $x, \partial h(x)$, é dado por:*

$$\partial h(x) := \left\{ x^* \in \mathbb{R}^n \mid \exists x_n \to x, \quad h(x_n) \to h(x), \quad x_n^* \in \hat{\partial} h(x_n) \ e\ x_n^* \to x^* \right\}$$

Proposição 2.1. *Para uma função $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e um ponto $\bar{x} \in dom(h)$, os conjuntos $\hat{\partial} h(\bar{x})$ e $\partial h(\bar{x})$ são fechados, com $\hat{\partial} h(\bar{x})$ convexo e $\hat{\partial} h(\bar{x}) \subset \partial h(\bar{x})$.*

Demonstração. Rockafellar e Wets [7], Teorema 8.6. □

Proposição 2.2. *Se uma função própria $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ possui um mínimo local em $\bar{x} \in dom(h)$, então $0 \in \hat{\partial} h(\bar{x})$ e $0 \in \partial h(\bar{x})$.*

Demonstração. Rockafellar e Wets [7], Teorema 10.1. □

Observação 2.1. *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$. Se uma função própria $h : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ possui um mínimo local $\bar{x} \in C$, então $0 \in \hat{\partial}(h + \delta_C)(\bar{x}), 0 \in \partial(h + \delta_C)(\bar{x})$, onde δ_C é a função indicatora do conjunto C.*

Em seguida vamos definir a aplicação quase-distância que será utilizada como parte da regularização dos subproblemas do algoritmo que iremos propor na próxima Seção.

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0438

Definição 2.2. *Uma aplicação* $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ *é uma quase-distância em* $\mathbb{R}^n$ *se, para todos* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$,

a) $q(x,y) = q(y,x) = 0 \iff x = y$ *b)* $q(x,z) \leq q(x,y) + q(y,z)$.

Proposição 2.3. *Seja* $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ *uma quase-distância em* $\mathbb{R}^n$. *Suponha que existem constantes positivas* α *e* β *tais que*

$$\alpha\|x-y\| \leq q(x,y) \leq \beta\|x-y\|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Então, para cada $\bar{z} \in \mathbb{R}^n$, ***a)*** *As funções* $q(\bar{z},.)$ *e* $q(.,\bar{z})$ *são lipschitzianas em* $\mathbb{R}^n$, ***b)*** *As funções* $q^2(\bar{z},.)$ *e* $q^2(.,\bar{z})$ *são localmente lipschitzianas em* $\mathbb{R}^n$ *e* ***c)*** *As funções* $q(\bar{z},.)$, $q(.,\bar{z})$, $q^2(\bar{z},.)$ *e* $q^2(.,\bar{z})$ *são coercivas.*

Demonstração. Moreno et al. [5], Proposições 3.6 e 3.7 e Observação 5. □

Antes de definirmos os conceitos de solução para problemas multiobjetivo apresentamos as seguintes notações.

Notação 2.1. *Considere os vetores* $y, \bar{y} \in \mathbb{R}^m$. *Utilizaremos as seguintes notações:* ***a)*** $y \leq \bar{y} \iff y_i \leq \bar{y}_i \;\; \forall i = 1, ..., m$; ***b)*** $y < \bar{y} \iff y_i \leq \bar{y}_i \;\; \forall i = 1, ..., m$, *com a desigualdade estrita assegurada para pelo menos um índice e* ***c)*** $y \ll \bar{y} \iff y_i < \bar{y}_i \;\; \forall i = 1, ..., m$.

Considere uma aplicação multiobjetivo $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e o seguinte Problema de Otimização Multiobjetivo (POM) irrestrito

$$\text{MINIMIZE}\{G(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}. \tag{3}$$

Definição 2.3. ***a)*** *Dizemos que* $a \in \mathbb{R}^n$ *é uma* ***solução eficiente local*** *para o problema (3) se existe um disco* $B_\delta(a) \subset \mathbb{R}^n$, *com* $\delta > 0$, *tal que não existe* $x \in B_\delta(a)$ *satisfazendo* $G(x) < G(a)$ *e,* ***b)*** *Dizemos que* $a \in \mathbb{R}^n$ *é uma* ***solução fracamente eficiente local*** *para o problema (3) se existe um disco* $B_\delta(a) \subset \mathbb{R}^n$, *com* $\delta > 0$, *tal que não existe* $x \in B_\delta(a)$ *satisfazendo* $G(x) \ll G(a)$.

Denotemos por ARG $\text{MIN}\{G(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ e ARG $\text{MIN}_w\{G(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ os conjuntos das soluções eficientes locais e soluções fracamente eficientes locais para o problema (3), respectivamente. É fácil ver que ARG $\text{MIN}\{G(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\} \subset$ ARG $\text{MIN}_w\{G(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$.

Em geral, se um problema de otimização multiobjetivo restrito ou irrestrito é um problema convexo, i.e., se a função objetivo $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função convexa, então toda solução (fracamente) eficiente local é também uma solução (fracamente) eficiente global. Este resultado é discutido no Teorema 2.2.3, em Miettinen [3].

Definição 2.4. *Uma função de valor escalar* $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *é dita ser uma*

a) ***Representação escalar*** *de uma aplicação* $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *quando, dados* $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $G(x) \leq G(\bar{x}) \Longrightarrow g(x) \leq g(\bar{x})$ *e* $G(x) < G(\bar{x}) \Longrightarrow g(x) < g(\bar{x})$;

b) ***Representação escalar estrita*** *de uma aplicação* $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *quando, dados* $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $G(x) \leq G(\bar{x}) \Longrightarrow g(x) \leq g(\bar{x})$ *e* $G(x) \ll G(\bar{x}) \Longrightarrow g(x) < g(\bar{x})$;

DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0438

*c) **Representação escalar fraca** de uma aplicação $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ quando, dados $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\quad G(x) \ll G(\bar{x}) \Longrightarrow g(x) < g(\bar{x})$.*

Segue imediatamente da definição 2.4 acima: a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c).

Dados $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ considere $\arg\ \min\{g(x) \mid x \in \Omega\}$ denotanto o conjunto dos minimizadores locais de g em Ω. Segue da Definição 2.4 que

$$\arg\ \min\{g(x) \mid x \in \Omega\} \subset \mathrm{ARG}\ \ \mathrm{MIN}_w\{G(x) \mid x \in \Omega\}.$$

3 Convergência para soluções eficientes

Rocha et al [6] supuseram a existência de uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo as propriedades $(P1)$ à $(P4)$ abaixo e então provaram a convergência do método de escalarização proximal para soluções fracamente eficientes do POM (1). Seguem as propriedades.

(P1) f é limitada inferiormente por algum $\alpha \in \mathbb{R}$;

(P2) f é convexa em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$;

(P3) f é uma representação escalar estrita de F, com respeito a x, i.e.,

$$F(x) \leq F(y) \ \Rightarrow f(x,z) \leq f(y,z) \quad \text{e} \quad F(x) \ll F(y) \ \Rightarrow \ f(x,z) < f(y,z)$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}^m_+$;

(P4) f é diferenciável, com respeito a z e

$$\frac{\partial}{\partial z} f(x,z) = h(x,z),$$

onde $h(x,z) = (h_1(x,z), \cdots, h_m(x,z))^T$ é uma aplicação contínua de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ para $\mathbb{R}^m_+$, i.e, $h_i(x,z) \geq 0$ para todo $i = 1, \cdots, m$.

Mostraremos nesta seção que se a propriedade $(P3)$ for substituída pela propriedade

(P3)' f é uma representação escalar de F, com respeito a x, i.e., $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ e $z \in \mathbb{R}^m_+$,

$$F(x) \leq F(y) \ \Rightarrow f(x,z) \leq f(y,z) \ \ \text{e} \ \ F(x) < F(y) \ \Rightarrow \ f(x,z) < f(y,z),$$

então a convergência do método de Rocha et al. [6] é na verdade para soluções eficientes (em vez de soluções fracamente eficientes) do POM (1). Salientamos que os exemplos de aplicações apresentados por Gregório e Oliveira [1] e por Rocha et al. [6] que satisfazem as propriedades (P1) à (P4) também satisfazem a propriedade (P3)'.

Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação satisfazendo as hipóteses $(\mathcal{H}1)$ e $(\mathcal{H}2)$. Para a definição do método de escalarização proximal (método EPLQD), Rocha et al. [6] consideram as seguintes hipóteses.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

(a) $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz as propriedades (P1) à (P4);

(b) $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ quase-distância atende (2);

(c) para $\bar{z} \in \mathbb{R}^m_{++}$ (fixo), $H_{\bar{z}} : \mathbb{R}^m_{++} \to \mathbb{R}$ é tal que $H_{\bar{z}}(z) = \langle \frac{z}{\bar{z}} - \log \frac{z}{\bar{z}} - e, e \rangle$, onde $e = (1, ..., 1) \in \mathbb{R}^m$, $\frac{z}{\bar{z}} = (\frac{z_1}{\bar{z}_1}, ..., \frac{z_m}{\bar{z}_m})$ e $\log \frac{z}{\bar{z}} = (\log \frac{z_1}{\bar{z}_1}, ..., \log \frac{z_m}{\bar{z}_m})$;

(d) $\{\beta^k\}$ e $\{\mu^k\}$ são sequências de parâmetros reais que satisfazem: $\beta^k > 0,\ \forall k \in \mathbb{N}$ e $0 < l < \mu^k < L < +\infty,\ \forall k \in \mathbb{N}$.

O método de Rocha et al. [6] gera uma sequência $\{(x^k, z^k)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_{++}$ da seguinte forma:

Método EPLQD

1. Tome $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e $z^0 \in \mathbb{R}^m_{++}$.

2. Dados $x^k \in \mathbb{R}^n$ e $z^k \in \mathbb{R}^m_{++}$, encontre $x^{k+1} \in \mathbb{R}^n$ e $z^{k+1} \in \mathbb{R}^m_{++}$ tais que

$$(x^{k+1}, z^{k+1}) \in \arg\ \min \left\{ \varphi^k(x, z) \mid (x, z) \in \Omega^k \times \mathbb{R}^m_{++} \right\}, \tag{4}$$

   onde $\varphi^k(x, z) = f(x, z) + \beta^k H_{z^k}(z) + \frac{\mu^k}{2} q^2(x, x^k)$ e $\Omega^k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \leq F(x^k)\}$.

3. Se $(x^{k+1}, z^{k+1}) = (x^k, z^k)$, então pare (pois $x^k \in \mathrm{ARG\ \ MIN}\{F(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$).

A partir de agora vamos considerar o método EPLQD com a aplicação $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a propriedade (P3)' em substituição a propriedade (P3) e consequentemente provar a convergência do método EPLQD para soluções eficientes. É importante observar que tudo o que foi provado em Rocha et al. [6] continua válido pois a propriedade (P3)' implica na propriedade (P3). Sendo assim, nos limitaremos apenas a provar o resultado principal de convergência. Citaremos os outros resultados.

Lema 3.1. *Seja $F = (F_1, F_2, ..., F_m)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação satisfazendo as hipóteses ($\mathcal{H}$1) e ($\mathcal{H}$2). Então, para cada $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ (fixado), o conjunto $\bar{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) \leq F(\bar{x})\}$ é convexo e compacto. Particularmente, $\bar{\Omega} \times \mathbb{R}^m_+$ é um conjunto convexo e fechado.*

Demonstração. Rocha et al. [6], Lema 4.1. □

Observação 3.1. *Suponha que $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ seja uma sequência gerada pelo método EPLQD. Pelo Lema 3.1, $\Omega^k, \forall k \in \mathbb{N}$ é um conjunto compacto. Portanto, como $\Omega^{k+1} \subseteq \Omega^k, \forall k \in \mathbb{N}$, temos: $\Omega = \bigcap_{k=0}^{\infty} \Omega^k \neq \emptyset$.*

Proposição 3.1 (Boa Definição)**.** *Sejam $F = (F_1, F_2, ..., F_m)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação satisfazendo às hipóteses ($\mathcal{H}$1) e ($\mathcal{H}$2), $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ uma aplicação quase-distância satisfazendo (2) e $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação verificando as propriedades (P1), (P2), (P3)' e (P4). Então, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe uma solução $\left(x^{k+1}, z^{k+1}\right)$ para o problema* (4)*.*

Demonstração. Rocha et al. [6], Proposição 4.2. □

Proposição 3.2 (Critério de Parada)**.** *Seja $\{(x^k, z^k)\}_{k\in N}$ uma sequência gerada pelo método EPLQD. Se $(x^{k+1}, z^{k+1}) = (x^k, z^k)$ para algum inteiro k então x^k é uma solução eficiente (ou Pareto) para o POM irrestrito (1).*

Demonstração. Análoga a prova da Proposição 4.3 de Rocha et al. [6]. □

Proposição 3.3 (Propriedades)**.** *Seja $\{(x^k, z^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência gerada pelo método EPLQD. Então:* ***i)*** *$\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada;* ***ii)*** *$\{z^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente;* ***iii)*** *$\{f(x^k, z^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ é não crescente e convergente;* ***iv)*** $\sum_{k=0}^{+\infty} q^2(x^{k+1}, x^k) < +\infty$ *e* ***v)*** $\lim_{k\to+\infty} \|x^k - x^{k+1}\| = 0$.

Demonstração. Rocha et al. [6], Proposições 4.4 e 4.5. □

Agora podemos provar a convergência do método EPLQD para soluções eficientes se o critério de parada nunca se aplica.

Teorema 3.1 (convergência)**.** *Sejam $F = (F_1, F_2, ..., F_m)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação satisfazendo as hipóteses ($\mathcal{H}1$) e ($\mathcal{H}2$), $q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ uma aplicação quase-distância satisfazendo (2) e $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação verificando as propriedades (P1), (P2), (P3)' e (P4). Então, qualquer sequência $\{(x^k, z^k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_{++}$ gerada pelo método EPLQD satisfaz: $\{z^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente e $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada com seus pontos de acumulação sendo soluções eficientes (ou Pareto) para o POM (1).*

Demonstração. Pela Proposição 3.3, $\{z^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é convergente e $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada. Portanto, existem $x^* \in \mathbb{R}^n$, $z^* \in \mathbb{R}^m_+$ e $\{x^{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ subsequência de $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{j\to+\infty} x^{k_j} = x^*$ e $\lim_{k\to+\infty} z^k = z^*$. Pela Proposição 3.3, $\{f(x^k, z^k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ é não crescente e convergente. Por (P2), f é contínua em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$. Logo,

$$\lim_{k\to+\infty} f(x^k, z^k) = \lim_{j\to+\infty} f(x^{k_j}, z^{k_j}) = f(x^*, z^*) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \{f(x^k, z^k)\}. \tag{5}$$

Considere $N_C(\bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, x - \bar{x}\rangle \leq 0 \ \forall x \in C\}$ o cone normal no ponto $\bar{x}$ em relação ao conjunto convexo C que contém $\bar{x}$. Pelo Corolário 4.1(i) de Rocha et al. [6], existem $\zeta^{k+1} \in \partial(q(., x^k))(x^{k+1})$ e $v^{k+1} \in N_{\Omega^k}(x^{k+1})$ tais que

$$-\mu^k q(x^{k+1}, x^k)\zeta^{k+1} - v^{k+1} \in \partial f(., z^{k+1})(x^{k+1}).$$

Daí, pela desigualdade do subgradiente para a função convexa $f(., z^{k+1})$ temos: $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{array}{rcl} f(x, z^{k_j+1}) & \geq & f(x^{k_j+1}, z^{k_j+1}) - \mu^{k_j} q(x^{k_j+1}, x^{k_j})\langle \zeta^{k_j+1}, x - x^{k_j+1}\rangle \\ & - & \langle v^{k_j+1}, x - x^{k_j+1}\rangle \end{array} \tag{6}$$

Como $v^{k_j+1} \in N_{\Omega^{k_j}}(x^{k_j+1})$ temos $-\langle v^{k_j+1}, x - x^{k_j+1}\rangle \ \geq 0, \quad \forall x \in \Omega^{k_j}$. Pela Observação 3.1, $\Omega = \bigcap_{k=0}^{\infty} \Omega^k \neq \emptyset$. Portanto, em particular, de (6) temos: $\forall x \in \Omega$,

$$f(x, z^{k_j+1}) \geq f(x^{k_j+1}, z^{k_j+1}) - \mu^{k_j} q(x^{k_j+1}, x^{k_j})\langle \zeta^{k_j+1}, x - x^{k_j+1}\rangle \tag{7}$$

Pela Prop. 4.6 de Rocha et al. [6] e Prop. 3.3 (iv), $\|\zeta^{k_j+1}\| \leq M$ e $\lim_{k\to+\infty} q(x^{k+1}, x^k) = 0$, respectivamente. Logo, como $0 < l < \mu^k < L, \forall\ k \in \mathbb{N}$ e $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, concluímos que

$$| \ \mu^{k_j} q(x^{k_j+1}, x^{k_j})\langle \zeta^{k_j+1}, x - x^{k_j+1}\rangle \ | \to 0 \text{ quando } j \to +\infty.$$

De (5), $f(x^{k_j+1}, z^{k_j+1}) \geq f(x^*, z^*)$. Portanto, de (7),

$$f(x, z^*) \geq f(x^*, z^*), \ \forall\ x \in \Omega. \tag{8}$$

Mostraremos agora que x^* é um solução Pareto para o POM irrestrito (1). Suponha, por contradição, que existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(\bar{x}) < F(x^*)$. Como $z^* \in \mathbb{R}^m_+$, por (P3)',

$$f(\bar{x}, z^*) < f(x^*, z^*). \tag{9}$$

Como $\Omega^{k+1} \subseteq \Omega^k, \ \forall k \geq 0$ e $x^{k_j} \in \Omega^{k_j-1}, \ \forall j$ com $x^{k_j} \to x^*, \ j \to +\infty$, temos que $x^* \in \Omega$, i.e., $F(x^*) \leq F(x^k), \ \forall k \in \mathbb{N}$. Logo $F(\bar{x}) \leq F(x^k), \ \forall k \in \mathbb{N}$, i.e, $\bar{x} \in \Omega$, o que contradiz (8) e (9). □

4 Conclusões

Dada a importância das soluções eficientes de problemas multiobjetivo associados a aplicações reais, investigamos e mostramos que os algoritmos proximais de Gregório e Oliveira [1] e Rocha et al. [6] convergem para soluções eficientes.

Referências

[1] R. Gregório and P. R. Oliveira. A Logarithmic-quadratic proximal point scalarization method for multiobjective programming, *J. Global Optim.*, 49:281-291, 2011.

[2] J. Jahn. Theory of vector maximization: Various concepts of efficient solutions. In: Gal, T., Stewart, T.J., Hanne, T. (eds.): Multicriteria Decision Making. *Advances in MCDM Models, Algorithms, Theory, and Applications*, volume 21, Kluwer, Boston, pages 37-68, 1999.

[3] K.M. Miettinen. *Nonlinear multiobjective optimization.* Kluwer, Boston, 1999.

[4] B.S. Mordukhovich. *Variational analysis and generalized differentiation I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, volume 330, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[5] F.G. Moreno, P.R. Oliveira and A. Soubeyran. A proximal Algorithm with Quasi Distance. Application to Habit's Formation, *Optimization*, 61:1383-1403, 2011

[6] R.A. Rocha, P.R. Oliveira, R.M. Gregório and M. Souza. Logarithmic quasi-distance proximal point scalarization method for multi-objective programming. *Appl. Math. Comput.*, 273:856-867, 2016.

[7] R.T. Rockafellar and R.J-B Wets. *Variational Analysis*, Springer, Berlin, 1998.

[8] D.J. White. A bibliography on the applications of mathematical programming multiple-objective methods, *J. Oper. Res. Soc.*, 41(8): 669-691, 1990.

