Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 6, n. 2, 2018.

Trabalho apresentado no XXXVIII CNMAC, Campinas - SP, 2018.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Uma Estratificação Visual dos Números Inteiros via fractais n-gons

Lúcia M. dos S. Pinto[1], Juscelino Bezerra dos S.[2], Isaac V. S. Rodrigues[3]
Escola Nacional de Ciências Estatísticas, Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, RJ

Resumo

Um inteiro positivo p é primo se seus únicos divisores positivos são 1 e p. O estudo destes números desperta a curiosidade dos matemáticos desde a antiguidade e se tornou de grande relevância nas últimas décadas devido as suas aplicações em criptografia [2]. Sabe-se, por exemplo, que existem infinitos primos e que a sua distribuição na reta real é aleatória. Ao contrário disto, a visualização da sequência dos números primos em outras estruturas geométricas indica alguns padrões curiosos. A espiral de Ulam [3], por exemplo, apresenta uma aparência fortemente não aleatória, onde os primos se concentram nas diagonais desta espiral. Tal estrutura é composta por pontos distintos que seguem uma enumeração e uma regra de construção bastante simples. Assim como o estudo feito por Ulam, o objetivo deste trabalho é construir um painel visual enumerado para identificar padrões na sequência dos primos. Para este fim, vamos utilizar a estrutura de um fractal de Sierpinski ou n-gon [1].

Um fractal é uma estrutura geométrica que repete-se dentro de si mesmo infinitamente. Tais repetições são chamadas de contrações. Computacionalmente, muitos fractais são construídos a partir de um algorítimo recursivo, e o que visualizamos é apenas uma etapa desta construção, resultando em um número finito de contrações, o que gera uma boa aproximação do fractal. Cada etapa desta recursão, define um nível do fractal como podemos ver na 1.

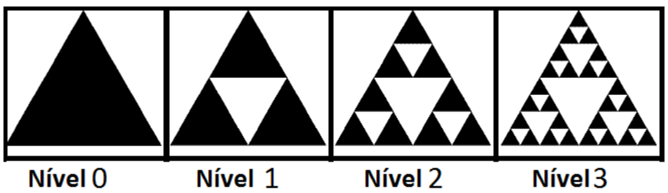

Figura 1: Diferentes níveis na construção do Triângulo de Sierpinski.

[1]lucia.pinto@ibge.gov.br
[2]juscelino.santos@ibge.gov.br
[3]isaacvictor@fisica.if.uff.br

Os fractais de Sierpinski são construídos de forma iterativa. O mais conhecido deles, o Triângulo de Sierpinski, pode ser construído a partir de um triângulo equilátero e a cada iteração posicionamos em cada vértice do triângulo uma contração sua, de forma que em cada nível desta construção, cada triângulo é dividido igualmente em quatro triângulos equiláteros e em seguida remove-se o triângulo central. Na sequência, repete-se o mesmo processo para cada um dos triângulos resultantes como apresentado na figura 1. Um processo similar pode ser utilizado para qualquer polígono regular de n lados, e desta forma obtemos os chamados n-gons. A ideia central deste trabalho é desenvolver um agoritmo para se construir n-gons via Python 2 (*www.python.org*) de forma a enumerar as suas menores contrações com o objetivo de visualizar alguns resultados importantes sobre números primos. Na figura 2, utilizamos 6-gons para visualizar a distribuição dos primos nestas enumerações onde destacamos os primos entre 1 e 216, e vemos que eles estão em duas contrações específicas. Em decorrência da enumeração utilizada, as contrações são descritas na forma de aritmética modular, elas absorvem as classes de inteiros módulo 6^i, permitindo ver, por exemplo, que um primo p será da forma $6k \pm 1$. Vale salientar que outros resultados clássicos podem ser visualizados a partir desta figura.

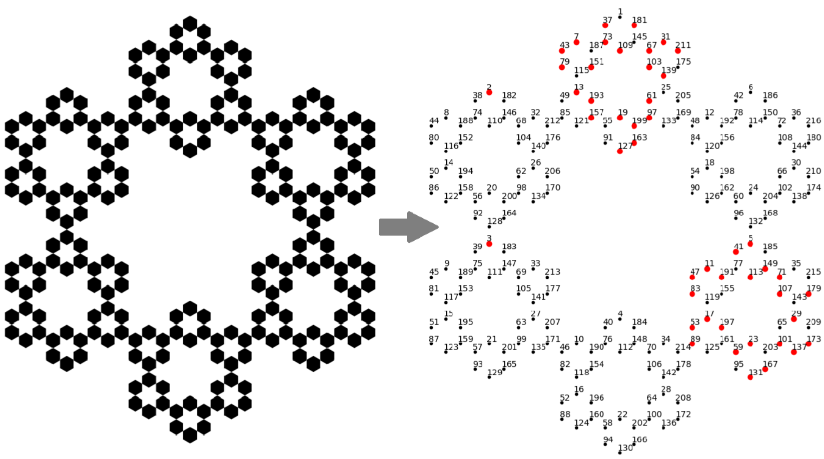

Figura 2: Enumeração do terceiro nível do 6-gon.

Palavras-chave. Números Primos, Congruências, Fractais, N-gons.

Referências

[1] K. Dennis, S. Schlicker. Sierpinski n-gons.*Pi Mu Epsilon Journal*, Vol. 10, No. 2, pp. 81-89 (1995).

[2] C. A. da Silva Fusco, S. P. Coelho. Um pouco da teoria dos números: da antiguidade até os dias atuais. *Ensino da Matemática em Debate*. ISSN 2358-4122 1.2 (2014).

[3] M. L. Stein, M. B. Wells, S. M. Ulam. A Visual Display of Some Properties of the Distribution of Primes. *American Mathematics Monthly*, 71, pp. 516-520, 1964. doi: 10.2307/2312588