

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Pontos Excepcionais e Transição de Fase Quântica

Marionir M. Castelo Branco N.¹
Giancarlo Queiroz Pellegrino ²

Programa de Pós-graduação em Modelagem Matemática e Computacional do Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (PPGMMC – CEFET-MG)

A *transição de fase quântica* (TFQ) à temperatura nula é caracterizada pela mudança, por vezes abrupta, do comportamento coletivo dos constituintes de um sistema quântico. Mais especificamente, TFQ ocorre quando a derivada $\frac{dE_1}{d\lambda}$ da energia do estado fundamental com relação ao parâmetro λ apresenta uma singularidade no então denominado *valor crítico* λ_c [4].

O hamiltoniano H , principal operador da mecânica quântica e que representa a energia total do sistema, é um operador linear atuando sobre um espaço de Hilbert, em que os vetores estão associados aos estados físicos acessíveis pelo sistema descrito por H . Em muitos casos, este operador pode ser expresso como $H = H_0 + \lambda H_{int}$ atuando em espaço de Hilbert de dimensão finita, em que H_0 é o hamiltoniano que descreve o sistema no caso em que as partículas não interagem e H_{int} é o operador que descreve a energia associada à interação entre as partículas. O parâmetro λ controla a intensidade dessas interações.

Na formulação matemática da mecânica quântica, é amplamente aceito que o operador H proposto para descrever um dado sistema deva ser auto-adjunto, o que garante convenientemente autovalores reais para as energias observáveis em laboratório. No caso de H como acima, com H_0 e H_{int} auto-adjuntos, isto implica que o parâmetro λ seja real. O relaxamento dessa exigência, admitindo-se hamiltonianos não-auto-adjuntos, tem tido uso bastante frutífero [1]. Aqui, este relaxamento pode ser levado a cabo permitindo-se que λ varie no plano complexo \mathbb{C} . Então, H acima deixa de ser auto-adjunto e seus autovalores $E(\lambda)$ passam a ser também complexos. É justamente a configuração assumida pelos **pontos excepcionais** $\bar{\lambda}$ do operador linear H – **valores de λ para os quais o número de auto-valores de H se altera** [3] – que faz este procedimento interessante para o estudo de TFQ. Tem sido observado que, no limite em que o número N de partículas do sistema tende a infinito, os pontos excepcionais proliferam no plano complexo e se acumulam nas vizinhanças do valor crítico (real) λ_c em que ocorrerá uma transição de fase quântica [2].

Do ponto de vista de sua determinação, é conveniente observar que um ponto excepcional $\bar{\lambda}$ é um valor para o qual algum autovalor $E(\lambda)$ tem sua multiplicidade alterada. Assim, os pontos excepcionais do operador H serão dados pelas soluções $\bar{\lambda}$ do sistema de equações

$$\begin{cases} |H - E\mathbb{I}| = 0 \\ \frac{d}{dE}|H - E\mathbb{I}| = 0, \end{cases} \quad (1)$$

¹marioniir@hotmail.com

²giancarloqpellegrino@cefetmg.br

em que \mathbb{I} é o operador identidade.

O objetivo deste estudo é a aplicação de uma abordagem unificada para a caracterização da TFQ em sistemas quânticos provenientes de diferentes áreas da Física, por meio do cálculo dos pontos excepcionais em cada sistema. Tal abordagem reescreve os hamiltonianos em forma padrão $H = H_0 + \lambda H_{int}$, utilizando apenas operadores J_z, J_+ e J_- que satisfazem as regras de comutação da álgebra $SU(2)$, e calcula os pontos excepcionais para diferentes números N de partículas no sistema. Neste resumo, apresentamos os resultados preliminares obtidos para o modelo de Lipkin, originário da física nuclear.

O hamiltoniano para o modelo de Lipkin pode ser escrito como

$$H = J_z - \frac{\lambda}{4j}(J_+^2 + J_-^2), \quad (2)$$

No caso deste modelo, o número de partículas N determina o valor j de um momento angular associado ao sistema e a dimensão do espaço de Hilbert \mathbb{H} por $N = 4j$ e $\dim \mathbb{H} = (2j + 1)$ [2]. Como indica a Figura 1, à medida que o momento angular adquire valores maiores, os pontos excepcionais convergem ao valor $\lambda_c = 1$.

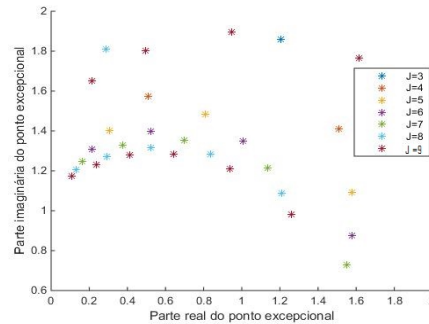


Figura 1: Distribuição dos pontos excepcionais no primeiro quadrante do plano complexo, para diferentes valores j do momento angular no modelo de Lipkin.

Pretende-se na sequência do trabalho abordar outros modelos, como os modelos de emparelhamento, da física nuclear; bicamada, da física da matéria condensada; de Heisenberg, do magnetismo; e de Dicke, da ótica.

Referências

- [1] C. M. Bender, Making sense of non-Hermitian Hamiltonians. *Reports on Progress in Physics*, 70(6):947–1018, 2007.
- [2] W. D. Heiss; F.G. Scholtz; H. B. Geyer. The Large N-Behavior of the Lipkin Model and Exceptional Points. *Journal of Physics A*, 38:1843–1851, 2005.
- [3] T. Kato, *Perturbation Theory of Linear Operators*. Springer, 1966.
- [4] S. Sachdev, *Quantum Phase Transitions*. Cambridge University Press, 2011.