Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Resolução Numérica para Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Não-lineares Rígidos [1]

Claudia. P. Ordóñez Rodríguez [2]
Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño, Cl 18 Cra 50 Blq 3, Pasto - Nariño, Colombia.
Catalina M. Rúa Alvarez [3]
Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño, Cl 18 Cra 50 Blq 3, Pasto - Nariño, Colombia.

1 Introdução

Uma dificuldade na aplicação dos métodos numéricos explícitos ocorre na solução de Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias (SEDO) rígidos ou *stiff*. Estes SEDO se caracterizam por ter a matriz Jacobiana mal condicionada; ou as componentes da solução variam algumas mais rápido do que as outras; ou os autovalores associados têm parte real com magnitude muito alta. Na tentativa de resolver numericamente sistemas rígidos, os métodos de passo único explícitos têm severas restrições com um elevado custo computacional, ver [2–4].

Os métodos numéricos implícitos surgem para solucionar as dificuldades mencionadas. Destacam-se o método de Euler implícito e os métodos Runge-Kutta implícitos (RKI) de diferentes ordens de convergência, os quais podem ser deduzidos por meio dos métodos de Taylor ou as condições de ordem simplificado. Assim é possível classificar diferentes métodos RKI, como Gauss-Legendre e Gauss-Lobatto, ver [1]. Neste trabalho, foram obtidos resultados numéricos para Gauss-Lobato de dois estágios e ordem 2 (RKI22); Gauss-Legendre de um estágio e ordem 2 (RKI12); e Gauss-Legendre de dois estágios e ordem 4 (RKI24).

A Tabela 1 apresenta os erros numéricos ao comparar a solução exata e a solução aproximada do sistema rígido (1), dado por

$$\begin{cases} x' = -1002x + 1000y^2, \\ y' = x - y - y^2, \\ x(0) = y(0) = 1 \quad \text{em} \quad t = [0, 5]. \end{cases} \tag{1}$$

[1]Este trabalho foi realizado com apoio da *Vicerrectoría de Investigaciones, Postgrados y Relaciones Internacionales de la Universidad de Nariño* - Colombia.

[2]ordoez.patricia@hotmail.com
[3]catalina.rua@udenar.edu.co

Tabela 1: Erros de Aproximação.

Método	h	Erro
Euler-Exp.	3.9063×10^{-3}	Divergência
Euler-Exp.	1.9531×10^{-3}	3.2879×10^{-5}
RK22	3.9063×10^{-3}	Divergência
RK22	1.9531×10^{-3}	2.1975×10^{-8}
Euler-Imp.	0.5	1.0612×10^{-2}
RKI12	0.5	5.4316×10^{-2}
RKI22	0.5	6.9936×10^{-4}

Da Tabela 1 pode-se concluir que os métodos explícitos de Euler e RK de dois estágios e ordem 2, divergem para tamanhos de passo maiores que $h_1 = 1.9531 \times 10^{-3}$. Porém os métodos implícitos de Euler, RKI12 e RKI22, convergem com $h_2 = 0.5$, onde $h_2 >> h_1$.

Neste trabalho foi feito um estudo teórico e computacional sobre sistemas rígidos, no qual com implementações realizadas na linguagem C obtêm-se resultados numéricos que permitem a validação dos algoritmos. Uma discussão sobre propriedades, análise do erro e ordem de convergência é realizada com os resultados numéricos obtidos aplicando métodos de passo múltiplo e métodos de passo único explícitos e implícitos. Finalmente, para os métodos implícitos ressalta-se a necessidade de solução de sistemas de equações não-lineares, onde o método de Newton com algumas modificações que diminuem o custo computacional para o cálculo da matriz Jacobiana e sua inversa são empregados, ver [5].

Referências

[1] J. C. Butcher. *Numerical methods for ordinary differential equations, 3a. edição*. John Wiley & Sons, USA, 2016.

[2] M. T. Darvishi, F. Khani and A. A. Soliman. The numerical simulation for stiff systems of ordinary differential equations, *Computers & Mathematics with Applications*, 54:1055–1063, 2007.

[3] G. Migoni. Simulación por Cuantificación de Sistemas Stiff, Tese de Doutorado, Universidad Nacional de Rosario, 2010.

[4] M. N. Spijker. Stiffness in numerical initial-vaue problems, *Comp. Appl. Math.*, 72(2):393–406, 1996.

[5] J. Terán and C. Rúa-Alvarez. El método de newton para raíces complejas: Fractales en el problema de Cayley, *Revista EIA*, 15(29):97–108, 2018. DOI: 10.24050/reia.v15i29.1131.