Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Uma Prova Analítica para a Determinação do Trapézio Isoperimétrico

Erik David Perozini de Oliveira[1]
Escola Estadual Professora Lucinda Bastos, Mogi das Cruzes, SP
Márcio Fabiano da Silva[2]
Centro de Matemática, Computação e Cognição, UFABC, Santo André, SP

Resumo. Neste trabalho estudamos a versão do problema isoperimétrico para trapézios, que consiste em determinar o trapézio de máxima área dentre aqueles de perímetro prescrito. Uma condição necessária da isoperimetria do trapézio é que ele seja isósceles. Para isso, consideramos um trapézio arbitrário não paralelogramo de perímetro L dado e fazemos o estudo de casos de acordo com a natureza de seus ângulos. A solução é obtida por meio de uma prova analítica a partir de desigualdades que envolvem o perímetro e a área do trapézio.

Palavras-chave. Isoperimétrico, Desigualdades, Trapézio.

1 Introdução

O problema isoperimétrico tem um papel importante na geometria diferencial. Sua formulação clássica no plano $\mathbb{R}^2$ consiste em determinar, dentre as regiões delimitadas por uma curva $\mathcal{C}^1$ por partes de perímetro (finito) prescrito, aquela com maior área, chamada de região isoperimétrica ou de solução isoperimétrica; no caso, o disco. Sua origem remonta à fundação da cidade de Cartago por volta do ano 850 a.C. e ficou conhecido como lenda (ou problema) da rainha Dido de Cartago. Para mais detalhes a respeito do problema isoperimétrico no plano, passando pelas principais caracterizações obtidas pelos gregos na Antiguidade, por Jakob Steiner (1796–1863) e chegando à prova de existência de solução dada por Karl Weierstrass (1815–1897) em 1879, recomendamos a referência [1]. Para muitas outras abordagens do problema isoperimétrico, no espaço $\mathbb{R}^3$, na geometria hiperbólica, no cubo, na bola e, mais geralmente, numa variedade Riemanniana, recomendamos a leitura de [4].

Neste trabalho, estudamos a versão do problema isoperimétrico para trapézios, que consiste em determinar dentre os trapézios de perímetro prescrito, aquele que delimita uma região de máxima área. A este trapézio dá-se o nome de trapézio isoperimétrico. Por trapézio, entendemos um quadrilátero que possui um par de lados opostos paralelos, conforme [2]. Desse modo, paralelogramos são trapézios nos quais os dois pares de lados

[1]erik_diplic@hotmail.com
[2]marcio.silva@ufabc.edu.br

opostos são paralelos, retângulos e quadrados são casos particulares de paralelogramos. Como é bem conhecido o fato que dentre todos os retângulos de perímetro prescrito, o que tem a maior área é o quadrado (que, por sua vez, é um caso particular de trapézio), consideramos aqui os trapézios não paralelogramos, ou seja, trapézios nos quais somente um par de lados opostos é paralelo, que são chamados de bases. Na referência [5], mostra-se que dentre os quadriláteros cujas medidas dos lados são dadas, aquele com área máxima é o inscritível (ou cíclico). Um simples argumento a respeito de ângulos inscritos garante que o trapézio inscritível é o isósceles. Assim, embora não esteja explícito no texto em [5], é possível concluir que uma condição necessária à isoperimetria do trapézio é que ele seja isósceles. Na próxima seção, daremos uma prova analítica deste resultado, por meio do estudo de desigualdades que envolvem o perímetro e a área de um trapézio considerado. De acordo com a natureza de seus ângulos internos, os trapézios de mesmo perímetro L são divididos em cinco casos, para os quais obtêm-se relações entre sua altura e as medidas de seus lados. No entanto, para quatro destes casos, mostramos que existe um trapézio isósceles do caso restante de mesmo perímetro e área maior. Finalmente, provamos que dentre os trapézios não paralelogramos de perímetro prescrito, o isósceles delimita maior área. No entanto, observamos que esta condição não é suficiente, de modo que não existe o trapézio não paralelogramo isósceles de máxima área.

2 O Trapézio Isoperimétrico

Problema: De todos os trapézios não paralelogramos de perímetro L dado, qual delimita maior área?

Para responder a este problema, consideremos um trapézio $ABCD$ com bases paralelas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e tal que $ABCD$ não seja um paralelogramo. Sejam $L_1 = AB$, $L_2 = CD$, com $L_1 > L_2$, $L_3 = AD$ e $L_4 = BC$. Temos cinco possibilidades para considerar:

<u>Caso 1:</u> se os ângulos $\angle DAB$ e $\angle CBA$ forem agudos, sejam E e F as projeções ortogonais de D e C sobre o lado $\overline{AB}$, respectivamente, $x = AE$ e $y = FB$. Neste caso, temos que ${L_3}^2 = x^2 + h^2$, ${L_4}^2 = y^2 + h^2$ e $x + y = L_1 - L_2$, em que h denota a altura do trapézio $ABCD$.

<u>Caso 2:</u> se o ângulo $\angle DAB$ for reto então $\angle CDA$ é reto e a altura h do trapézio $ABCD$ é $h = L_3$. Considerando C' como sendo a projeção ortogonal de C sobre $\overline{AB}$, temos que $CC' = L_3$ e $C'B = L_1 - L_2$. Assim, $L_4 > L_3$ e

$$L_4^2 = L_3^2 + (L_1 - L_2)^2. \tag{1}$$

<u>Caso 3:</u> se o ângulo $\angle DAB$ for obtuso, $\angle CBA$ for agudo e $\overline{C'D'} \cap (\overline{AB} \setminus \{A\}) \neq \emptyset$, em que C', D' são as projeções ortogonais de C e D, respectivamente, sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$, sejam $x = D'A$ e h a altura do trapézio $ABCD$. Assim, $AC' = L_2 - x$ e $C'B = L_1 - L_2 + x$.

Além disso,

$$L_3^2 = h^2 + x^2 \quad \text{e} \quad {L_4}^2 = h^2 + (L_1 - L_2 + x)^2. \tag{2}$$

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0462

De (2) podemos concluir que $L_4^2 > L_3^2$, pois $L_1 - L_2 > 0$. Logo, $L_4 > L_3$. Também temos que $L_4^2 - L_3^2 = (L_1 - L_2 + x)^2 - x^2 = (L_1 - L_2 + 2x).(L_1 - L_2)$, donde segue que

$$x = \frac{L_4^2 - L_3^2 - (L_1 - L_2)^2}{2.(L_1 - L_2)}. \tag{3}$$

No triângulo $\triangle D'DA$, temos que $0 < x < L_3$. Ou seja, $0 < \frac{L_4^2 - L_3^2 - (L_1 - L_2)^2}{2.(L_1 - L_2)} < L_3$. Como $L_1 - L_2 > 0$ então $L_4^2 - L_3^2 - (L_1 - L_2)^2 > 0$, donde segue que

$$\frac{L_4^2 - L_3^2}{(L_1 - L_2)^2} > 1. \tag{4}$$

Susbtituindo (3) na segunda equação de (2), obtemos que

$$h^2 = L_4^2 - \frac{(L_4^2 - L_3^2)^2}{4.(L_1 - L_2)^2} - \frac{1}{2}.(L_4^2 - L_3^2) - \frac{1}{4}(L_1 - L_2)^2.$$

Ou seja,

$$h^2 = \frac{1}{2}(L_4^2 + L_3^2) - \frac{(L_4^2 - L_3^2)^2}{4.(L_1 - L_2)^2} - \frac{1}{4}(L_1 - L_2)^2. \tag{5}$$

<u>Caso 4:</u> se o ângulo $\angle DAB$ for obtuso, $\angle CBA$ for agudo e $\overline{C'D'} \cap \overline{AB} = \emptyset$, em que C', D' são as projeções ortogonais de C e D, respectivamente, sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$, sejam $x = C'A$ e h a altura do trapézio $ABCD$. Assim, $D'A = L_2 + x$ e $C'B = L_1 + x$. Além disso,

$$L_3^2 = h^2 + (L_2 + x)^2 \quad \text{e} \quad L_4^2 = h^2 + (L_1 + x)^2. \tag{6}$$

De (6) concluímos que $L_4^2 > L_3^2$, uma vez que $L_1 > L_2 > 0$. Logo, $L_4 > L_3$. Também temos que $L_4^2 - L_3^2 = (L_1 + x)^2 - (L_2 + x)^2 = (L_1 + L_2 + 2x).(L_1 - L_2)$, donde segue que

$$x = \frac{(L_4^2 - L_3^2)}{2.(L_1 - L_2)} - \frac{(L_1 + L_2)}{2}. \tag{7}$$

No triângulo $\triangle DD'A$, observemos que $0 < L_2 + x < L_3$. Por (7), temos que

$$L_2 + x = \frac{1}{2}.(L_2 - L_1) + \frac{1}{2}.\frac{(L_4^2 - L_3^2)}{(L_1 - L_2)}. \tag{8}$$

Assim, $0 < \frac{1}{2}.(L_2 - L_1) + \frac{1}{2}\frac{(L_4^2 - L_3^2)}{L_1 - L_2} < L_3$ e $0 < \frac{L_4^2 - L_3^2 - (L_1 - L_2)^2}{L_1 - L_2} < 2L_3$. Como $L_1 - L_2 > 0$ então $L_4^2 - L_3^2 - (L_1 - L_2)^2 > 0$. Portanto,

$$\frac{L_4^2 - L_3^2}{(L_1 - L_2)^2} > 1. \tag{9}$$

Substituindo (8) na primeira equação de (6), obtemos que

$$L_3^2 = h^2 + \frac{1}{4}.\Big(\frac{L_4^2 - L_3^2 - (L_1 - L_2)^2}{L_1 - L_2}\Big)^2.$$

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0462

Ou seja,

$$h^2 = \frac{1}{2}.(L_4^2 + L_3^2) - \frac{1}{4}.\frac{(L_4^2 - L_3^2)^2}{(L_1 - L_2)^2} - \frac{1}{4}.(L_1 - L_2)^2. \tag{10}$$

<u>Caso 5:</u> se o ângulo $\angle DAB$ for obtuso, $\angle CBA$ for agudo e $\overline{C'D'} \cap \overline{AB} = \{A\}$, em que C', D' são as projeções ortogonais de C e D, respectivamente, sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$, seja h a altura do trapézio $ABCD$. Assim, $C' = A$,

$$L_3^2 = h^2 + L_2^2 \quad \text{e} \quad L_4^2 = h^2 + L_1^2. \tag{11}$$

Segue de (11) que $L_4 > L_3$, pois $L_1 > L_2$. Além disso, $h^2 = L_3^2 - L_2^2 = L_4^2 - L_1^2$. Consequentemente, $L_4^2 - L_3^2 = L_1^2 - L_2^2$, que é equivalente a ter $x = 0$ em (6). Portanto, o Caso 5 pode ser tratado como um caso particular do caso 4, em que $x = 0$.

A seguir, serão obtidos alguns resultados auxiliares para que, finalmente, o problema inicial desta seção seja resolvido.

Lema 2.1. *Dado um trapézio $ABCD$ nas condições do Caso 2 de perímetro L prescrito, existe um trapézio isósceles (como no Caso 1) de mesmo perímetro L, mas com área maior que a área do trapézio $ABCD$.*

Demonstração. Considere o trapézio isósceles $XYZW$ de bases paralelas $\overline{XY}$ e $\overline{ZW}$, com $XY = L_1$ e $ZW = L_2$. Como $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4$ então $XW = YZ = \frac{L_3 + L_4}{2}$. Portanto, os trapézios $ABCD$ e $XYZW$ têm o mesmo perímetro L. A altura H do trapézio $XYZW$ pode ser determinada por

$$\left(\frac{L_3 + L_4}{2}\right)^2 = H^2 + \left(\frac{L_1 - L_2}{2}\right)^2. \tag{12}$$

Por (1), temos que $H^2 = \frac{(L_3+L_4)^2}{4} - \frac{(L_4^2 - L_3^2)}{4} = \frac{2L_3.L_4 + 2.L_3^2}{4}$. Assim,

$$H^2 = \frac{L_3.L_4 + L_3^2}{2}. \tag{13}$$

Como os trapézios $ABCD$ e $XYZW$ têm as mesmas medidas das bases, suas áreas podem ser comparadas somente com suas alturas h e H. Como h, $H > 0$, podemos fazer tal comparação a partir de h^2 e H^2. Temos que $h^2 = L_3^2$ e por (13), $H^2 = \frac{L_3.L_4 + L_3^2}{2}$. Como $L_4 > L_3$, $H^2 = \frac{L_3.L_4 + L_3^2}{2} > \frac{L_3^2 + L_3^2}{2} = L_3^2 = h^2$. Portanto, a área do trapézio $XYZW$ é maior que a área do trapézio $ABCD$. □

Lema 2.2. *Dado um trapézio $ABCD$ nas condições do Caso 3, de perímetro L prescrito, existe um trapézio isósceles (como no Caso 1) de mesmo perímetro L, mas com área maior que a área do trapézio $ABCD$.*

Demonstração. Considere o trapézio isósceles $XYZW$ construído na prova do lema 2.1, mas agora com L_1, L_2, L_3 e L_4, satisfazendo as condições do Caso 3. Sendo H a altura do

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0462

trapézio $XYZW$, comparemos h e H a partir das equações dadas em (5) e (12). Suponha, por absurdo, que $H^2 \leqslant h^2$. Ou seja,

$$\frac{1}{4}.(L_3+L_4)^2 - \frac{1}{4}(L_1-L_2)^2 \leqslant \frac{1}{2}.(L_4^2+L_3^2) - \frac{(L_4^2-L_3^2)^2}{4.(L_1-L_2)^2} - \frac{1}{4}.(L_1-L_2)^2.$$

Assim, $\frac{(L_4^2-L_3^2)^2}{4.(L_1-L_2)^2} \leqslant \frac{1}{4}L_3^2 - \frac{1}{2}L_3.L_4 + \frac{1}{4}.L_4^2 = \frac{1}{4}.(L_4-L_3)^2$ e $\frac{(L_4^2-L_3^2)^2}{(L_1-L_2)^2} \leqslant (L_4-L_3)^2$. Segue de (4), de $L_4^2 - L_3^2 > 0$ e da desigualdade anterior que $L_4^2 - L_3^2 < (L_4-L_3)^2$, isto é, $L_4 < L_3$, o que é um absurdo.

Portanto, concluímos que $H^2 > h^2$ e que a área do trapézio isósceles $XYZW$ é maior que a área do trapézio $ABCD$.

□

Lema 2.3. *Dado um trapézio $ABCD$ na condições do Caso 4, de perímetro L prescrito, existe um trapézio isósceles (como no Caso 1) de mesmo perímetro L, mas com área maior que a área do trapézio $ABCD$.*

Demonstração. Considere o trapézio isósceles $XYZW$ construído na prova do lema 2.1, mas agora com L_1, L_2, L_3 e L_4 satisfazendo as condições do Caso 4. Sendo H a altura do trapézio $XYZW$, comparemos h e H a partir das equações dadas em (10) e (12). Suponha, por absurdo, que $H^2 \leqslant h^2$. Exatamente como na prova do lema 2.2, obtemos que

$$\frac{(L_4^2-L_3^2)^2}{(L_1-L_2)^2} \leqslant (L_4-L_3)^2. \tag{14}$$

Segue de (9), de $L_4^2 - L_3^2 > 0$ e da desigualdade (14) que $L_4^2 - L_3^2 < (L_4-L_3)^2$, isto é, $L_4 < L_3$, o que é um absurdo.

□

Lema 2.4. *Dado um trapézio $ABCD$ nas condições do Caso 5, de perímetro L prescrito, existe um trapézio isósceles (como no Caso 1) de mesmo perímetro L mas com área maior que a área do trapézio $ABCD$.*

Demonstração. Como o Caso 5 pode ser tratado como um caso particular do Caso 4, tomando-se $x = 0$, a prova do lema 2.4 é obtida tornando-se $x = 0$ na prova do lema 2.3.

Portanto, concluímos que $H^2 > h^2$ e que a área do trapézio isósceles $XYZW$ é maior que a área do trapézio $ABCD$.

□

Segue dos lemas 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4 que dado um trapézio $ABCD$ (nas condições do Caso 1) de perímetro fixo L, bases paralelas de medidas L_1 e L_2, com $L_1 > L_2$, é possível obter um trapézio isósceles com bases L_1, L_2 e perímetro L cuja área é maior que a de $ABCD$. Portanto, uma condição necessária para que um trapézio seja isoperimétrico é que ele seja isósceles. Neste caso, a altura do trapézio isósceles é $h = \sqrt{L_3^2 - \left(\frac{L_1-L_2}{2}\right)^2}$ e sua área é igual a

$$\frac{(L_1+L_2)}{2}.\sqrt{L_3^2 - \Big(\frac{L_1-L_2}{2}\Big)^2} = \frac{(L_1+L_2)}{4}.\sqrt{(L-2L_1)(L-2L_2)}. \tag{15}$$

Observação 2.1. *Ser isósceles não é uma condição suficiente para garantir a existência de um trapézio de perímetro prescrito L e área máxima. Na verdade, não existe um trapézio isósceles não paralelogramo de perímetro L cuja área seja máxima, pois existem infinitos trapézios isósceles não paralelogramos de perímetro L. No entanto, existe uma sequência de trapézios isósceles não paralelogramos de perímetro L cujas áreas convergem para* $\frac{L^2}{16}$*, que corresponde à área do quadrilátero isoperimétrico, que é o quadrado de lado cuja medida é* $\frac{L}{4}$*. Esta afirmação é garantida calculando-se o máximo da função área dada em (15) nas variáveis* L_1 *e* L_2 *e suas restrições. Para isso, aplica-se o cálculo diferencial para determinação dos pontos críticos e hessiano da função área, obtendo-se que o máximo ocorre para o caso degenerado* $L_1 = L_2 = \frac{L}{4}$*. Como* $L = L_1+L_2+2L_3$*, temos* $L_3 = L_4 = \frac{L}{4}$ *e a máxima área é* $\frac{L^2}{16}$*.*

Caso consideremos fixadas também as medidas L_1 e L_2 das bases, com $L_1 > L_2$, o trapézio isoperimétrico, isto é, o que delimita a maior área dentre aqueles de perímetro L e bases de medidas L_1 e L_2, é o isósceles. Esta conclusão é obtida a partir do lema e argumentação seguintes.

Lema 2.5. *De todos os triângulos* $\triangle ABC$*, de base fixa* $\overline{AB}$ *e perímetro dado* L*, o que tem a maior área é o isósceles com* $AC = BC$*.*

Demonstração. Consideremos uma elipse ε de focos A e B determinada pelos pontos P do plano tais que $AP + BP = L - AB = 2a$. Como o perímetro de cada triângulo $\triangle ABC$ é constante igual a L, então $C \in \varepsilon$ e C não é colinear a A e B. Sendo h a altura do triângulo $\triangle ABC$, temos que como a base $\overline{AB}$ está fixa, então a maior área possível de um triângulo $\triangle ABC$ é obtida para o maior valor possível de h, que é obtido para o caso em que a projeção ortogonal de C sobre $\overline{AB}$ coincide com o ponto médio de $\overline{AB}$. Neste caso, $AC = BC$.

□

Consideremos um trapézio $ABCD$ (nas condições do Caso 1) de perímetro fixo L, bases paralelas de medidas L_1 e L_2 fixas, com $L_1 > L_2$ e altura h variável. Na figura 1 está ilustrada uma possível decomposição dele.

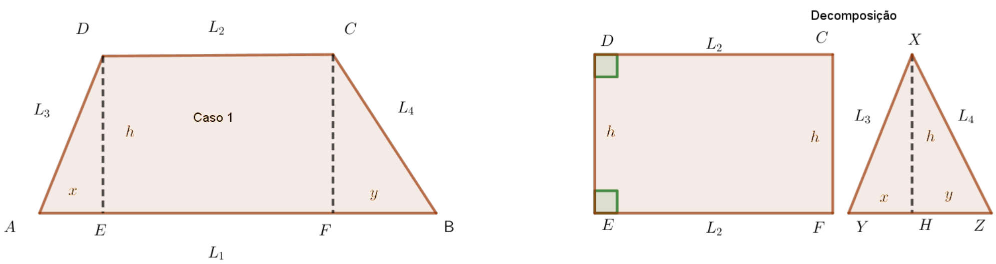

Figura 1: Trapézio do Caso 1 e sua decomposição.

Em relação a esta decomposição, temos que $\alpha(ABCD) = \alpha(CDEF) + \alpha(\triangle XYZ)$, onde $\alpha(\mathcal{P})$ denota a área de uma região no plano delimitada pelo polígono $\mathcal{P}$, $CDEF$

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0462

é um retângulo de lados com medidas L_2 fixa e h variável, $\triangle XYZ$ é um triângulo com base de medida fixa $x + y$ fixa e altura variável h. Desse modo, max $\alpha(ABCD) =$ max $(\alpha(CDEF) + \alpha(\triangle WYZ))$.

Pelo lema 2.5, a área do triângulo $\triangle XYZ$ é máxima quando ele é isósceles com $L_3 = L_4$. Consequentemente, $\alpha(ABCD)$ é máxima também quando $L_3 = L_4$, pois as medidas das bases do trapézio $ABCD$ e do triângulo $\triangle XYZ$ estão fixadas, assim como a medida de um dos lados do retângulo $CDEF$, e h é a altura do trapézio $ABCD$, do triângulo $\triangle XYZ$ e de um dos lados do retângulo $CDEF$. Portanto, dentre os trapézios como no Caso 1 de bases L_1 e L_2 fixas, perímetro L fixo, altura h variável, o de maior área é o isósceles ($L_3 = L_4$).

3 Conclusões

A partir dos resultados obtidos na seção anterior, ficou demonstrado o seguinte teorema.

Teorema 3.1. *Sejam L uma constante real positiva dada e τ_L o conjunto de trapézios não paralelogramos do plano de perímetro L. Para todo $\mathcal{T} \in \tau_L$, existe um trapézio isósceles $\mathcal{P} \in \tau_L$ tal que $\alpha(\mathcal{P}) \geq \alpha(\mathcal{T})$.*

A prova apresentada é resultado da pesquisa dos autores a respeito do problema isoperimétrico no plano [3] e ilustra bem a importância das desigualdades no tratamento de problemas geométricos.

Agradecimentos

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES e da FAPESP (processo número 2019/12814-9). Os autores agradecem aos avaliadores pelas valiosas sugestões dadas para o aprimoramento do texto.

Referências

[1] V. Blåsjo. The Isoperimetric Problem, *The American Mathematical Monthly*, 112(6):526–566, 2005. DOI: 10.1080/00029890.2005.11920227.

[2] E. E. Moise. *Elementary geometry from an advanced standpoint, 3a edição*. Addison-Wesley, Reading-USA , c1990.

[3] E. D. P. de Oliveira. Uma Abordagem sobre a Desigualdade Isoperimétrica para o Ensino Médio, Dissertação de Mestrado, UFABC, 2016.

[4] M. Ritoré and A. Ross. Some updates on isoperimetric problems, *The Mathematical Intelligencer*, 24(3):9–14, 2002. DOI: 10.1007/BF03024725.

[5] A. Treibergs. Inequalities that imply the isoperimetric inequality, http://www.math.utah.edu/~treiberg/isoperim/isop.pdf.

