Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

O Argumento da Dualidade no Método de Elementos Finitos

Franklin Da Conceição De Barros [1]
Universidade Federal Fluminense - UFF
Honório Fernando [2]
Universidade Federal Fluminense - UFF

1 Introdução

Apresentamos neste trabalho a prova conhecida na literatura especializada em método de elementos finitos como *argumento da dualidade* devido a Nitsche e Aubin [1, 3]. Usamos aqui a notação padrão. Por simplicidade, assumimos que o aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, é um domínio poligonal limitado convexo de fronteira $\partial\Omega$. Além disso, $(\cdot,\cdot)_\Omega$ denota o produto interno em $L^2(\Omega)$, munido da norma $||\cdot||_{L^2(\Omega)}$, e para $d \in \{1,2\}$, $H^d(\Omega)$ representam espaços de Hilbert de ordem d. Definimos também o subespaço de $H^1(\Omega)$ dado por $H^1_0(\Omega) := \{\, w \in H^1(\Omega) \,|\, w = 0 \,\text{sobre}\, \partial\Omega \,\}$. Indicamos por $||\cdot||_{H^d(\Omega)}$ e $|\cdot|_{H^d(\Omega)}$ a norma e a semi-norma nos espaços correspondentes. Denotamos por $\tau_h := \{\, K \,\}$ uma partição de Ω em elementos triangulares regulares K, indexada por h que representa sua dimensão característica, i.e, $h := \max_{K\in\tau_h} h_K$ onde h_K indica o diâmetro de K. Com isso, introduzimos o subespaço aproximante $V_h(\Omega) := \{\, w \in H^1_0(\Omega) \mid\ w|_K \in \mathbb{P}_1(K) \,\}$ onde $\mathbb{P}_1(K)$ é o espaço de funções polinômiais lineares por partes sobre cada elemento K de τ_h. Finalizamos esta seção com a colocação do nosso problema modelo na forma que se segue: Dado $f \in L^2(\Omega)$, encontrar $u \in H^1_0(\Omega)$ tal que

$$(\nabla u, \nabla v)_\Omega = (f, v)_\Omega \ , \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \,, \tag{1}$$

2 O Argumento da Dualidade

Para aproximar $u \in H^1_0(\Omega)$ em (1), o método de elementos finitos baseado na formulação clássica de Galerkin considera o seguinte problema aproximado: Dado $f \in L^2(\Omega)$, encontrar $u_h \in V_h(\Omega) \subset H^1_0(\Omega)$ tal que

$$(\nabla u_h, \nabla v_h)_\Omega = (f, v_h)_\Omega \ , \quad \forall v_h \in V_h(\Omega) \,. \tag{2}$$

[1] franklin_conceicao@id.uff.br
[2] honorio.jf@gmail.com

Supondo $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, temos uma estimativa para o erro $e := u - u_h$ do método de elementos finitos medido na norma-$H^1(\Omega)$, veja por exemplo [2], dada por

$$||u - u_h||_{H^1(\Omega)} \leq Ch|u|_{H^2(\Omega)} \,, \tag{3}$$

na qual a constante positiva C é independente de h. A estimativa em (3), fornece

$$||u - u_h||_{L^2(\Omega)} \leq Ch|u|_{H^2(\Omega)} \,, \tag{4}$$

que é considerada sub-ótima, pois definindo $\Pi_h u \in V_h$ como sendo a interpolante de u em V_h, da teoria de aproximação, veja por exemplo [2], temos a seguinte estimativa para o erro de interpolação medido na norma-$L^2(\Omega)$

$$||u - \Pi_h u||_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2|u|_{H^2(\Omega)} \,. \tag{5}$$

O *argumento da dualidade*, objeto deste trabalho, permite recuperar uma estimativa similar a estimativa em (5) para o erro e decorrente do método de elementos finitos medido na norma-$L^2(\Omega)$, ou seja, permite obter uma estimativa da forma

$$||u - u_h||_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2|u|_{H^2(\Omega)} \,, \tag{6}$$

conhecida como estimativa ótima.

Ressaltamos que sob baixa regularidade, digamos $u \in H^1(\Omega)$, temos como impacto imediato uma redução nas potências de h, conduzindo a

$$||u - \Pi_h u||_{L^2(\Omega)} \leq Ch|u|_{H^1(\Omega)} \quad \text{e} \quad ||u - \Pi_h u||_{H^1(\Omega)} \leq Ch^0|u|_{H^1(\Omega)} \,. \tag{7}$$

Contudo, é ainda possível mostrar que $\lim_{h\to 0} ||u - \Pi_h u||_{H^1(\Omega)} = 0$, veja [2], pg 134, 135, para detalhes, o que guarante a convergência em $H^1(\Omega)$ até mesmo nesse caso.

3 Conclusão

O *argumento da dualidade* é uma estratégia bastante explorada em análise de elementos finitos considerando problemas elípticos mais gerais, problemas parabólicos, bem como os mais variados esquemas de elementos finitos, o que de certa maneira ressalta sua importância.

Referências

[1] Aubin, J. P. Behavior of the error of the approximate solutions of boundary value problems for linear elliptic operators by Galerkin's and finite difference methods. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **21** 599-637 (1967).

[2] Ciarlet, P. G. The finite element method for elliptic problems. *North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York-Oxford* (1978).

[3] Nitsche, J. A. Ein Kriterium fur die Quasi-Optimalitat des Ritzschen Verfahrens. *Numer. Math.* **11** 346-348 (1968).