

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Aproximações para um modelo de passeios aleatórios
interagentes em grafos finitos ¹

Carlos E. Hirth Pimentel ²;

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 668, 13560-970 São Carlos, SP, Brasil.

Pablo M. Rodriguez ³;

Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal de Pernambuco, Av. Prof. Moraes Rego, 1235. Cidade Universitária, CEP 50670-901, Recife - PE, Brasil.

Catalina M. Rúa Alvarez ⁴;

Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño, Cl 18 Cra 50 Blq 3, Pasto, Nariño, Colombia.

Resumo

Diversos sistemas complexos consistem em dinâmicas aleatórias que podem ser representadas por partículas que se difundem e interagem em um espaço de topologia definida. O chamado modelo dos sapos na literatura de probabilidade é um exemplo no qual um sistema de partículas realiza passeios aleatórios entre os vértices de um grafo. De maneira resumida, existem dois tipos de partículas, as ativas e as inativas. Enquanto cada partícula ativa realiza um passeio aleatório simétrico pelo grafo, as partículas inativas permanecem imóveis até serem visitadas por alguma partícula ativa, após isto, esta se torna ativa e começa a realizar, independentemente, um passeio aleatório simétrico através do grafo. Neste trabalho é proposto o estudo da evolução da ativação dos vértices do sistema e das coberturas finais (proporção final de vértices visitados) para este modelo em grafos finitos através de aproximações por campo-médio e simulação computacional.

Palavras-chave Modelo dos sapos, Processo estocástico a tempo contínuo, Sistema de partículas interagentes, Grafos finitos, Sistemas complexos.

¹O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código Financeiro 001. Parte deste trabalho foi apoiado pela FAPESP (Grants 2016/11648-0, 2017/10555-0), CNPq (Grant 304676/2016-0)

²carlos.pimentel@usp.br;

³pablo@de.ufpe.br;

⁴catalina.rua@udenar.edu.co

1 Introdução

O modelo dos sapos é definido como um sistema de partículas que interagem em um grafo finito G_n (i.e., contendo n vértices). Informalmente, a dinâmica do modelo que ocorre em tempo contínuo, pode ser descrita da seguinte forma: suponha que cada vértice do grafo está ocupado inicialmente, i.e., $t = 0$, com apenas uma partícula ativa, enquanto que as $n - 1$ restantes são inativas. Adicionalmente, suponha que cada partícula ativa realiza um passeio aleatório simétrico pelo grafo. Se o vértice de destino da partícula ativa, em determinado instante de tempo, estiver ocupado previamente por uma inativa então esta última se torna ativa e inicia um novo passeio aleatório de forma independente das demais. Se uma partícula ativa pula para um sítio vazio ou ocupado com outras também ativas, então ela é retirada do sistema. Neste caso é usual dizer que a mesma "morre".

Formalmente, o modelo é uma cadeia de Markov a tempo contínuo (C.M.T.C.) $(\psi_t)_{t \geq 0}$ com espaço de estados $\{-1, 0, 1, 2\}^V$, onde $V := \{1, 2, 3, \dots, n\}$ representa o conjunto de vértices do grafo. Cada estado do processo é um vetor $(\psi(i) : i \in V)$, onde $\psi(i) \in \{-1, 0, 1, 2\}$. Aqui os estados $-1, 0, 1, 2$ representam, respectivamente, um vértice vazio, um vértice com 1 partícula inativa, um vértice com 1 partícula ativa e um vértice com 2 ativas. Logo, o processo evolui de acordo às seguintes transições:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\psi_{t+h}(i) = 1 | \psi_t(i) = 2) &= h + o(h), \\ \mathbb{P}(\psi_{t+h}(i) = 0 | \psi_t(i) = 1) &= h + o(h), \\ \mathbb{P}(\psi_{t+h}(i) = 2 | \psi_t(i) = -1) &= h(N_1(i) + 2N_2(i)) + o(h), \end{aligned}$$

onde $N_\ell(i) := N_\ell(\psi, i)$ é o número de vizinhos do vértice i que estão no estado ℓ , para $\ell \in \{-1, 0, 1, 2\}$ e para a configuração ψ .

Este método foi proposto inicialmente com um modelo de transmissão de informação. De fato, pode-se imaginar as partículas ativas como agentes que carregam uma informação e as inativas como agentes desinformados. Para mais detalhes sobre a formulação inicial deste modelo e alguns resultados em grafos infinitos, ver [1, 5, 7] e suas referências. Mais recentemente, diferentes pesquisadores focaram no estudo deste processo em grafos finitos. Nesta direção, as quantidades de interesse estão relacionadas com a proporção final de vértices visitados por partículas ativas, ver [2, 4, 6]. Até o presente momento os resultados em grafos finitos estão restritos ao caso do grafo completo. Neste trabalho são propostas duas formas de aproximação para estudar estas quantidades de interesse, a qual serão exemplificadas para o caso do grafo $2k$ -cíclico.

2 Resultados

2.1 Aproximação por campo-médio

Usando o mesmo método apresentado em [3] para um modelo análogo, é possível fornecer uma descrição aproximada da evolução dos estados de cada vértice, quando o modelo é definido em grafos finitos. Para este fim, é empregado uma aproximação por

campo-médio, na qual assume-se independência entre os estados dos vértices de G_n . Desta forma pode-se encontrar uma aproximação para a evolução das probabilidades:

$$\begin{cases} x_i(t) & := P(\psi_t(i) = -1), \\ y_i(t) & := P(\psi_t(i) = 0), \\ z_i(t) & := P(\psi_t(i) = 1), \\ w_i(t) & := P(\psi_t(i) = 2), \end{cases} \quad (1)$$

para todo $i \in V$. Mais precisamente, é possível conseguir a seguinte aproximação para o comportamento destas probabilidades:

$$\begin{cases} x'_i(t) & = -\sum_{j=1}^n \frac{A_{j,i}}{k_j} \{z_j(t) + 2w_j(t)\} x_i(t), \\ y'_i(t) & = z_i(t), \\ z'_i(t) & = -z_i(t) + 2w_i(t), \\ w'_i(t) & = -2w_i(t) + \sum_{j=1}^n \frac{A_{j,i}}{k_j} \{z_j(t) + 2w_j(t)\} x_i(t), \end{cases} \quad (2)$$

em que $A_{j,i} = A_{i,j} = 1$ se os vértices i, j são vizinhos (ou 0 caso contrário) e $k_j = \sum_{i=1}^n A_{i,j}$ é o grau do vértice j . Em outras palavras, as constantes $A_{i,j}$ são os elementos da matriz de adjacência do grafo considerado.

Observação 2.1. *Para o caso em que G_n é o grafo completo de n vértices, já é conhecido o sistema de equações diferenciais cuja solução se aproxima das trajetórias do processo estocástico para valores suficientemente grandes de n . Neste caso se $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ e $w(t)$ representam as proporções de vértices em cada categoria no instante t então o sistema é dado pelas equações:*

$$\begin{cases} x'(t) = -\{z(t) + 2w(t)\} x(t), \\ y'(t) = z(t), \\ z'(t) = -z(t) + 2w(t), \\ w'(t) = -2w(t) + \{z(t) + 2w(t)\} x(t). \end{cases} \quad (3)$$

As soluções numéricas do sistema (3) são ilustradas na Figura 2.1, para os valores iniciais $x(0) = 0.99$, $y(0) = 0$ e $z(0) = 0.01$. O modelo dos sapos no grafo completo foi bem estudado, e generalizado, em [2, 4]. Mais recentemente, se encontrou sua conexão com modelos existentes na literatura para descrever a transmissão de um rumor em uma população homogênea totalmente misturada, ver [6] e suas referências.

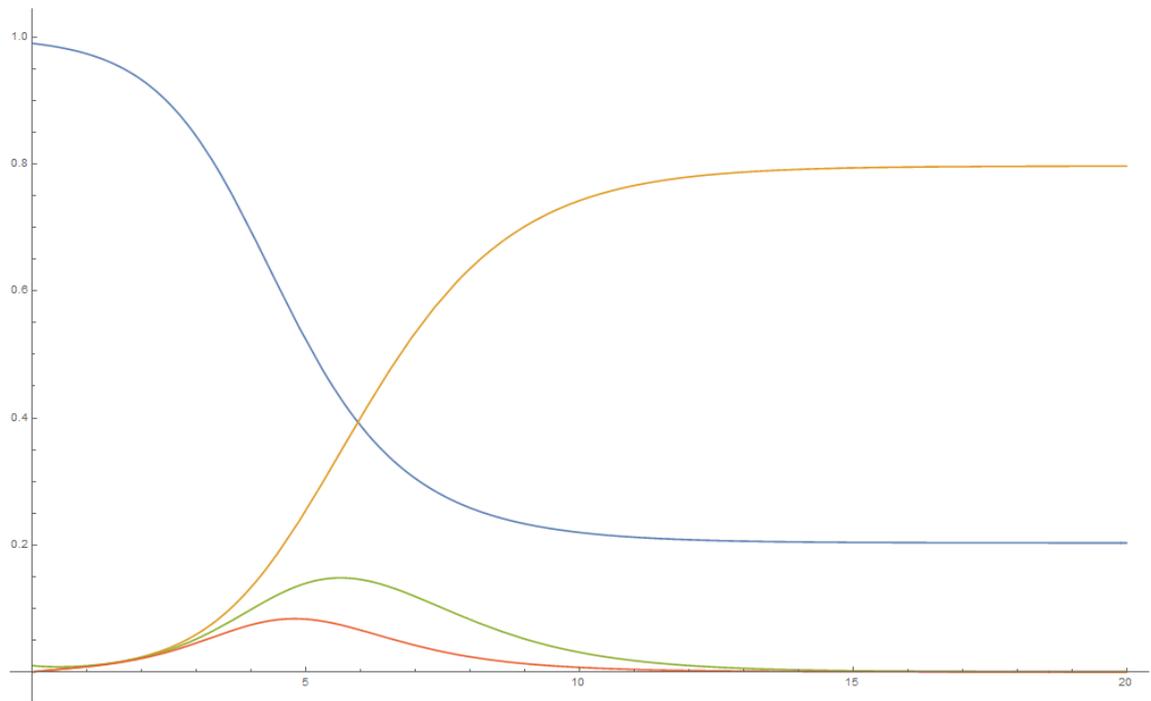


Figura 1: Evolução das soluções do sistema limite do modelo dos sapos para um grafo completo. A linha azul representa a dinâmica de $x(t)$, em amarelo $y(t)$, em verde $z(t)$ e em vermelho $w(t)$. Gráfico com valores iniciais $x(0) = 0,99, y(0) = 0, z(0) = 0,01$ e $w(0) = 0$.

Como exemplo de aplicação do sistema (2) considera-se o modelo dos sapos definido no grafo $2k$ -cíclico de n vértices. Tal grafo é obtido a partir de n vértices arranjados em um ciclo e conectando cada vértice com seus $2k$ vizinhos mais próximos, para $1 < k \leq n$. Fazendo $c := 2k$, representa-se este grafo por $C_{n,c}$. O interesse deste trabalho é na obtenção da proporção final de vértices em cada uma das categorias; isto é, nos estados $-1, 0, 1, 2$. O resultado gerado a partir da solução numérica das equações em (2) é resumido na Figura 2. Observa-se que a medida que c aumenta, a proporção de vértices visitados por alguma partícula ativa em $C_{n,c}$ tende a aumentar drasticamente. Intuitivamente isto se deve ao fato de que, para valores pequenos de c , aumentam-se as chances das partículas ativas visitarem novamente vértices já visitados nos primeiros estágios do processo. Portanto a tendência é que o processo finalize rápido. (Pode-se observar este comportamento na Figura 2(a)) Por outro lado, a medida que c cresce, $C_{n,c}$ se aproxima do comportamento de um grafo completo e portanto é de esperar que o mesmo aconteça com o comportamento do modelo estocástico, ver Figura 2(b)-(d).

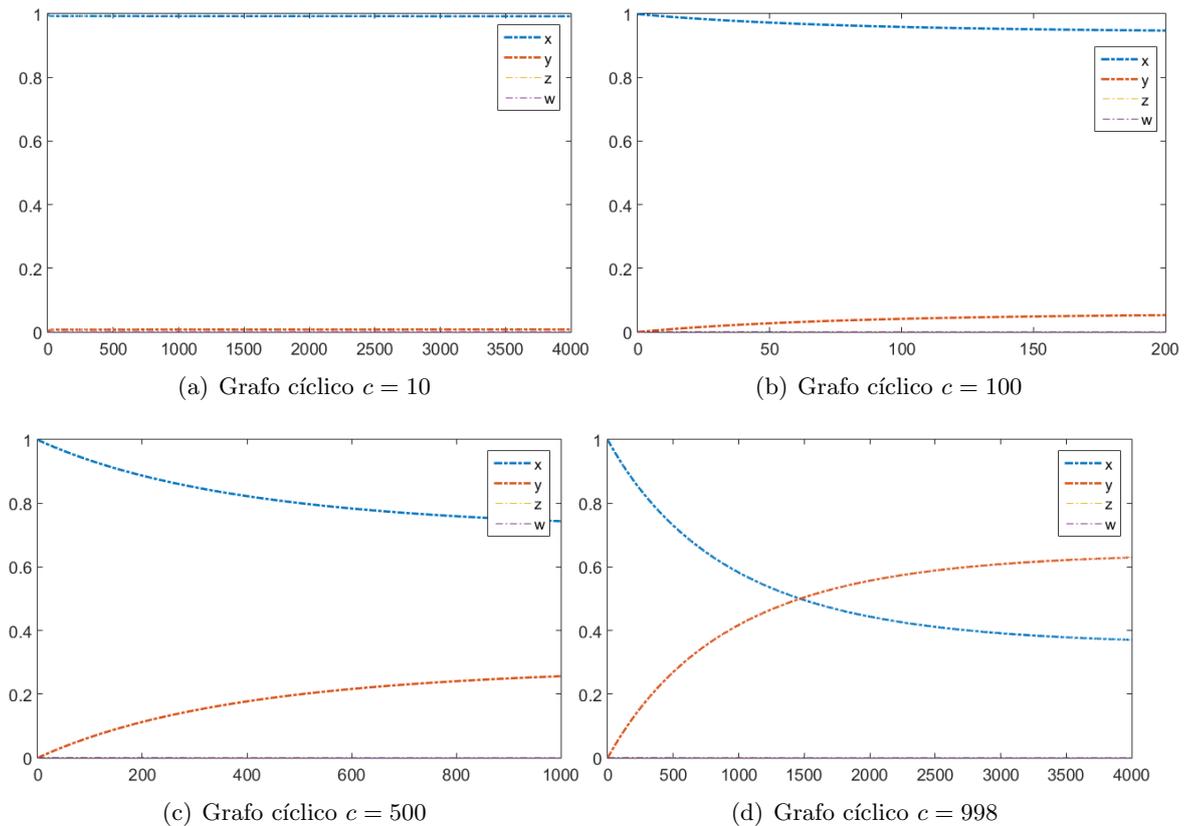


Figura 2: Solução numérica para a aproximação campo-médio do modelo dos sapos em $C_{n,c}$ para $n = 1000$ e diferentes valores de c .

2.2 Simulações computacionais

Numa segunda abordagem de aproximação, foram realizadas simulações computacionais do modelo dos sapos em $C_{n,c}$ para $n = 1000$. Assumindo a configuração inicial de uma partícula ativa em um vértice do grafo e $n - 1$ vértices habitados por uma partícula inativa. Foram executadas 100 simulações, variando o parâmetro c de 4 a 200 (de 2 em 2) e computadas as médias das coberturas finais, denotadas por x_∞ e y_∞ . Conforme pode ser observado na Figura 3, cujo os resultados mostram que as coberturas possuem um ponto crítico em torno de $c = 40$; antes desse valor a cobertura de sítios visitados y_∞ aumenta enquanto a cobertura de sítios inativos diminui. Mas para $c > 40$ as coberturas atingem os valores próximos do previsto para o grafo completo com $x_\infty \approx 0.2$ e $y_\infty \approx 0.8$.

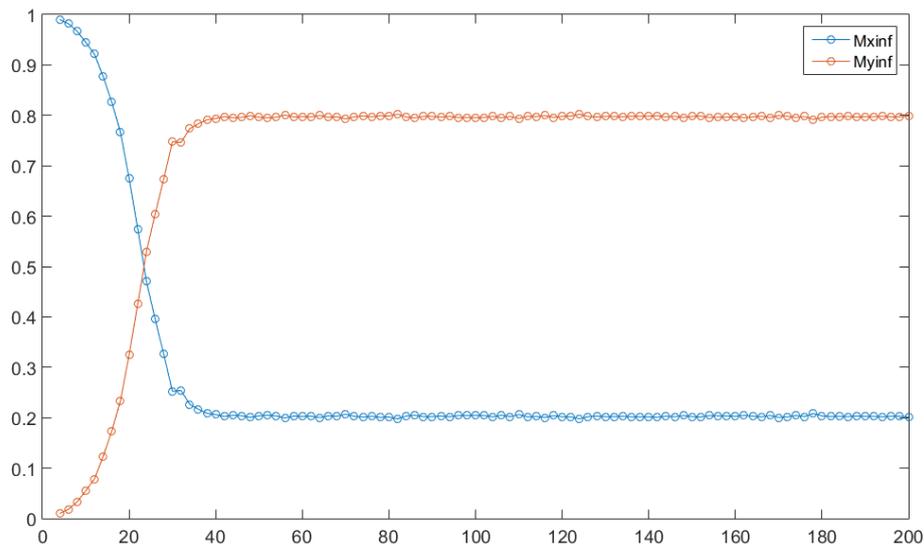


Figura 3: Médias de 100 simulações para x_∞ (Leg: Mxinf) e y_∞ (Leg: Myinf) Modelo dos sapos percorrendo um grafo do tipo cíclico com $c = 2k$ elos vizinhos, variando o valor de c de 4 a 200 e $n = 1000$ vértices.

3 Conclusões

Foram apresentadas duas aproximações para estudar um modelo de passeios aleatórios em grafos finitos. Este método, conhecido da literatura de probabilidade, tem sido estudado por outros autores principalmente no grafo completo. Uma quantidade de interesse é a proporção final de vértices visitados por partículas ativas quando o processo finaliza. Quando definimos o modelo no grafo $C_{n,c}$, as aproximações obtidas neste trabalho sugerem a existência de uma mudança de comportamento desta proporção a partir de um certo valor do parâmetro c . A abordagem usada através do sistema (2) evidencia esta mudança, mas isto é mais claro nas simulações computacionais, onde uma aproximação com o comportamento observado no grafo completo fica mais clara para valores grandes de c . Uma pergunta de interesse é como deve se comportar c , como função de n , para garantir um comportamento desta proporção análogo ao exibido no grafo completo. O estudo deste problema é parte de trabalho em andamento.

Referências

- [1] O. S. M. Alves, F. P. Machado and S. Yu Popov. Phase transition for the frog model, *Electron. J. Probab*, 7(16):1–25, 2002.
- [2] O. S. M. Alves, E. Lebensztayn, F. P. Machado and M. Z. Martinez. Random walks systems on complete graphs, *Bull. Braz. Math. Soc.*, 37(4):571–55, 2006.

- [3] G. F. de Arruda, E. Lebensztayn, F. A. Rodrigues and P. M. Rodríguez. A process of rumour scotching on finite populations, *Royal Society open science*, 2(9):150–240, 2015.
- [4] T. G. Kurtz, E. Lebensztayn, A. R. Leichsenring and F. P. Machado. Limit theorems for an epidemic model on the complete graph, *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat*, 4:45–55, 2008.
- [5] E. Lebensztayn, F. P. Machado and S. Popov. An improved upper bound for the critical probability of the frog model on homogeneous trees, *J. Stat. Phys.*, 119(1):341–345, 2005.
- [6] E. Lebensztayn and P. M. Rodríguez. A connection between a system of random walks and rumor transmission, *Phys. A*, 392:5793–5800, 2013.
- [7] A. Telcs and N. C. Wormald. Branching and tree indexed random walks on fractals. *J. Appl. Probab.*, 36(4):999–1011, 1999.