Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 2, N. 1, 2014.
Trabalho apresentado no CMAC-Sul, Curitiba-PR, 2014.

Aplicação das Equações Diferenciais e da Transformada de Laplace em Circuitos Elétricos

Glaucia Maria Bressan **Thiago de Souza Pinto**
Leandro Naves de Oliveira*
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Av. Alberto Carazzai, 1640, CEP 863.000-000
Câmpus Cornélio Procópio, PR
Coordenação do Curso de Matemática
E-mail: glauciabressan@utfpr.edu.br

RESUMO

O presente trabalho tem como principal objetivo a utilização da teoria matemática, em especial Equações Diferenciais e Transformada de Laplace, para compreensão de aplicações reais de pequeno porte que envolvam circuitos elétricos integrados.

A Transformada de Laplace é fundamental para o estudo de alguns fenômenos físicos. Por ser uma ferramenta muito eficiente de resolução de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Segunda Ordem, a Transformada de Laplace é muito bem aplicada na análise da tensão de circuitos elétricos, cuja modelagem envolve este tipo de equação diferencial, como pode ser visto na referência [4].

Em geral, o método de Transformada de Laplace consiste em resolver equações diferenciais como se fossem equações algébricas ([1];[4]). Desta forma, pode-se chegar a uma função, de variável diferente da primeira, que possui uma determinada e desejável propriedade que a primeira função não possuía. Em seguida, fazendo o caminho inverso, o qual é chamado de transformada inversa, pode-se obter o resultado esperado para a primeira função, em sua variável original.

Desta forma, a tensão em um circuito do tipo RC (resistor-capacitor) série, por exemplo, é dada pela Equação (1)

$$E(t) = \frac{1}{C} q + R \frac{dq}{dt} \tag{1}$$

Ao transformar a Equação (1), aplicando Laplace, a equação resultante pode ser resolvida por métodos algébricos mais simples. A transformada inversa retorna, por sua vez, a solução procurada na variável *t*.

Os *filtros contínuos* são definidos como blocos lineares básicos formados por circuitos elétricos utilizados em diversos sistemas eletrônicos. A equação diferencial que define a forma de onda da saída, para um dado sinal de entrada, está implícita na função de transferência do filtro [2]. A forma mais simples de caracterizar o comportamento de um filtro é através do cálculo da sua Função de Transferência no domínio da transformada de Laplace, escrita na Equação (2).

$$H(s) = \frac{V_s(s)}{V_e(s)} \tag{2}$$

Ou seja, o estudo do bloco pode ser feito diretamente a partir da relação entre o sinal de saída $V_s(s)$ e o sinal de entrada $V_e(s)$. Este princípio básico da análise de sistemas lineares e invariantes no tempo permite simplificar e generalizar o estudo de qualquer circuito, independentemente da arquitetura interna utilizada para implementar o filtro.

*Bolsista de iniciação tecnológica e industrial B

Os chamados filtros Passa-Baixa RC são circuitos eletrônicos que permitem a passagem de baixas frequências e reduz a amplitude das frequências maiores que a frequência de corte [3]. Sendo assim, estes circuitos filtram sons agudos, ou seja, de frequências altas e deixam passar sons de baixa frequência, os graves.

A Figura 1 ilustra uma descrição do circuito elétrico que representa um Filtro Passa-Baixa, onde V_e é a tensão de entrada do circuito, V_s é a tensão de saída do capacitor, R o resistor, C o capacitor e i a corrente.

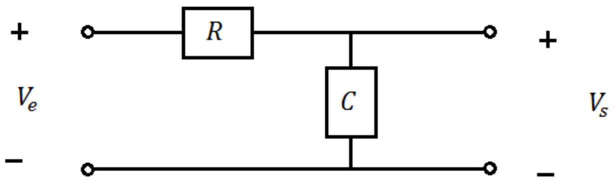

Figura 1. Circuito RC – Filtro Passa-Baixa.

A tensão de saída V_s pode ser escrita em função de V_e conforme a Equação (3)

$$V_s = \frac{X_c}{R+X_c} V_e, \tag{3}$$

em que X_c é a reatância capacitiva dada na Equação (4)

$$X_c = \frac{1}{j\omega C} \; . \tag{4}$$

Substituindo a Equação (4) na Equação (3), obtemos a Equação (5)

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1+Rj\omega C} = H(\omega). \tag{5}$$

A Equação (5), indicada por $H(\omega)$, é a função transferência de um Filtro Passa-Baixa RC em função da frequência. Como $H(\omega)$ é uma função complexa e o ganho de tensão é o módulo da função de transferência na forma polar, e a fase é o ângulo da função de transferência, podemos escrever respectivamente a expressão para o ganho de tensão e fase para um Filtro Passa-Baixa RC, conforme Equações (6) e (7)

$$GV = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \tag{6}$$

$$\alpha = arctg(\omega RC) \tag{7}$$

Por meio da função transferência de um Filtro Passa-Baixa RC dada na Equação (5), pode-se descobrir a frequência de corte, ou frequência limite. Observando que a frequência de limite ocorre quando $G = \frac{1}{\sqrt{2}}$, então

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0031

$$1 + (\omega_c RC)^2 = 2 \Rightarrow (\omega_c RC)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC} \tag{8}$$

Assim, a Equação (8) fornece a frequência de corte para um Filtro Passa-Baixa RC. Utilizando as Equações (7) e (8) tem-se que a fase na frequência de corte será igual a $\alpha = -45°$.

Este trabalho está em fase final e pretende-se avançar os estudos para a Teoria de Resposta em Frequência (Função de Transferência, diagrama de Bode, Ressonância Série e Paralela e Filtros Passivos) e compreender aplicações como, por exemplo, Receptores de Rádio e Discagem por Tom.

Palavras-chave: *Circuito RC, Filtros, Transformada de Laplace.*

Referências

[1] K. Ogata. "Engenharia de Controle Moderno". 5ª ed. Rio de Janeiro: Pearson Education, 2011.

[2] A.V. Oppenheim, A.S. Willsky, S.H. Nawab. "Signals and Systems". 2ª ed. Prentice Hall, 1996.

[3] M. N. O. Sadiku, C.K. Alexander. "Fundamentos de Circuitos Elétricos". 5ª. ed. McGraw Hill, 2013.

[4] D. G. Zill, M.R. Cullen. "Equações Diferenciais". 3ª ed. São Paulo: Makron Books, 2001.

