Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Fatoração de matrizes aplicada à resolução de sistemas lineares

João Pedro Cardoso da Silva de Vasconcellos[1]
Instituto de Ciências Exatas, UFF, Volta Redonda
Marina Ribeiro Barros Dias[2]
Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, UFF, Volta Redonda
Rosemary Miguel Pires[3]
Departamento de Matemática, Instituto de Ciências Exatas, UFF, Volta Redonda

1 Introdução

Devido à sua aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento, o estudo dos sistemas lineares tem como principal objetivo a determinação de solução do sistema $Ax = b$, quando possível. No caso geral, A é uma matriz qualquer de dimensão $m \times n$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}^m$. A solução de um sistema linear, quando existe, é uma n-upla de valores $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ que satisfazem simultaneamente todas as equações do sistema. Este trabalho apresenta um estudo de técnicas de resolução de sistemas lineares através da fatoração da matriz do sistema.

Em termos mais formais, se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, resolver o sistema linear $Ax = b$ consiste em encontrar um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ tal que Ax é a melhor aproximação para b, ou seja, obter um vetor x que minimize $||Ax - b||_2$, onde $||.||_2$ é norma vetorial euclidiana [1]. Para os casos em que a matriz A é quadrada, ou seja, $m = n$ e A é uma matriz não singular ($det(A) \neq 0$), o problema tem resposta simples: $x = A^{-1}b$. Entretanto, se o sistema é sobredeterminado, ou seja, $m > n$, é possível que nenhum x satisfaça $Ax = b$ (nesses casos procura-se uma solução aproximada, que minimize $||Ax - b||_2$ e este problema é conhecido como problema de quadrados mínimos). Ocasionalmente, encontram-se problemas indeterminados, onde $m < n$. Neste trabalho foi proposto o estudo dos sistemas lineares em que A é matriz quadrada de ordem n não singular (portanto o sistema possui solução única) e dos sistemas sobredeterminados, ou seja, os casos em que $m > n$. A fatoração LU e a fatoração de Choleskky [2] (considerando A definida positiva) foram estudadas e aplicadas à resolução de sistemas que se encaixam no primeiro caso. Uma implementação computacional, em linguagem C, foi elaborada para a resolução dos sistemas triangulares e a solução x do sistema foi encontrada para ambas as fatorações [3].

[1]jvasconcellos@id.uff.br
[2]marinaribeiro@id.uff.br
[3]rosemarypires@id.uff.br

A fatoração ortogonal (QR) e a Decomposição em Valores Singulares (SVD) foram estudadas e aplicadas na resolução do problema de quadrados mínimos [1, 4]. Para o primeiro caso, pela triangularização de Householder [1, 4], a fatoração $A = \widehat{Q}\widehat{R}$ reduzida foi calculada. Então, calculou-se o vetor $y = \widehat{Q}^T b$ e o sistema triangular superior $\widehat{R}x = y$ foi resolvido, tendo como solução o vetor x. Já na aplicação da fatoração SVD para a resolução do problema de quadrados mínimos, o seguinte algoritmo foi elaborado e implementado [5]: primeiro, calculou-se a fatoração SVD reduzida, de forma que $A = \widehat{U}\widehat{\Sigma}V^T$. Em seguida, o vetor $y = U^T b$ foi calculado e o sistema diagonal $\widehat{\Sigma}w = \widehat{U}^T b$ foi resolvido para w. Então, definiu-se $x = Vw$.

2 Conclusões

Neste trabalho foi feita uma revisão sobre as técnicas de fatoração de matrizes LU e Cholesky para a resolução de sistemas lineares da forma $Ax = b$ nos casos em que $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e A é definida positiva. Os algoritmos para a resolução dos sistemas foram estudados e uma implementação computacional foi feita. Para os casos implementados, observou-se que a fatoração de Cholesky foi o método mais eficiente, confirmando o que já era esperado, pois a fatoração de Cholesky envolve menos operações que a fatoração LU. As fatorações QR e SVD foram utilizadas para a resolução do problema de quadrados mínimos, onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com $m > n$ e foram implementadas. Como trabalho futuro, pretende-se comparar a eficiência dos métodos QR e Cholesky no caso de sistemas lineares sobredeterminados.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) pela bolsa de Iniciação Científica E26/202.016/2018.

Referências

[1] L. N. Trefethen, D. III. Bau, *Numerical Linear Algebra.* pub-SIAM, 1997 .

[2] L. E. da S. Campos, Um estudo sobre fatoração de matrizes e a resolução e sistemas lineares, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, Unicamp, 2008.

[3] R. L. Burden, J. D. Faires, *Análise Numérica, 8a. edição.* Cengage Learning, São Paulo,

[4] G. H. Golub, C. F. Van Loan, *Matrix Computations, 3a. edição.* The John Hopkins University Press, Maryland, 1996.

[5] A. B. R. da A. Graça, Problemas de Mínimos Quadrados : Resolução e aplicações. Trabalho de Conclusão de Curso de graduação em Matemática Aplicada, UFF, 2016.

