

---

# Extensão via E-operador de Implicações Fuzzy Valoradas em Reticulado

Mariana Rosas Ribeiro <sup>1</sup>

Universidade Federal de Uberlândia

Eduardo Silva Palmeira <sup>2</sup>

Universidade Estadual de Santa Cruz

## 1 Resumo

O problema da extensão de funções é muito conhecido em matemática. Em [3] é discutida a extensão de conectivos fuzzy valorados em reticulados limitados e são desenvolvidos dois métodos de extensão, chamados “via retração” e “via e-operador”. Neste trabalho, testamos o via e-operador em implicações fuzzy e obtivemos bons resultados.

Inicialmente, o primeiro ponto motivador dessa pesquisa é a diversidade de aplicações da lógica fuzzy, especialmente no que diz respeito à inteligência artificial. Outro ponto chave é quanto à escolha por valorar em reticulados, que oferece mais generalização para modelar situações nas quais nem sempre há relação de ordem total (ver [2]). Por fim, a ideia de avançar a pesquisa proposta em [3] na investigação de implicações fuzzy vem pela importância que esse conectivo lógico apresenta; em especial, implicações fuzzy vem sendo usadas em memórias associativas (ver [1]).

Encontraremos dentro da teoria de reticulados algumas definições preliminares para o desenvolvimento das técnicas de extensão elaboradas em [3]. Com esse aporte, obtemos uma definição crucial para esse trabalho, que é a de retração. E a partir desse conceito, [3] define uma noção mais geral de subreticulado, o  $(r,s)$ -subreticulado, na qual a estrutura de conjunto associada a um subreticulado não precisa estar contida no reticulado em que ele está inserido.

Ainda como aparato preliminar, é importante entender o que são os conectivos lógicos fuzzy. Quando [4] estende a lógica clássica, ganhamos uma possibilidade maior de definir os conectivos lógicos “conjunção”, “disjunção”, “negação”, “implicação”. Neste trabalho, a conjunção clássica é generalizada pela t-norma, a disjunção pela t-conorma, a negação pela negação fuzzy e a implicação clássica pela implicação fuzzy.

As implicações podem apresentar algumas propriedades, nomeadas: condição da fronteira à esquerda, à direita ou 4 (CFE, CFD ou CF4, respectivamente), princípio da neutralidade à esquerda (NE), princípio da troca, da identidade ou da ordenação (PT, PI ou

---

<sup>1</sup>rosasmari15@gmail.com

<sup>2</sup>espalmeira@uesc.br

PO, respectivamente), lei da iteratividade Booleana, da contraposição, da contraposição à esquerda ou à direita (LIB, LC, LC-E ou LC-D, respectivamente) ou positividade (P). Podemos, ainda, considerar dois tipos especiais de implicação fuzzy: a (S,N)-implicação e a R-implicação.

Diante desse quadro preliminar, [3] debruça sob o problema da extensão. Ele está interessado em, tendo um conectivo fuzzy definido em M, um (r,s)-subreticulado de L, estender esse conectivo para L. E o método desenvolvido é o método via retração, que usa a ideia de retração citada anteriormente.

Ao investigar essa técnica de extensão, observa-se que algumas daquelas propriedades de implicação não são carregadas através desse método. A fim de obter melhores resultados, [3] cria um segundo método de extensão, que utiliza um operador de extensão.

Utilizando esse método para a implicação fuzzy, provamos neste trabalho que, assim como o método via retração, o via e-operador também estende a implicação. Além disso, ao testarmos aquelas doze propriedades da implicação, temos como resultado que esse método preserva todas elas. A Tabela 1 compara os resultados do método via retração e o método via e-operador para implicações.

Tabela 1: Comparação dos resultados da extensão de implicação via retração e e-operador.

I. fuzzy	CFE	CFD	CF4	NE	PT	PI	PO	LIB	LC	LC-E	LC-D	P
$I^E$	✓	✓	✓	×	✓	✓	×	✓	✓	✓	✓	×
$I_{\odot}^E$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Ao olharmos para a S,N e a R-implicação, obtemos os resultados a seguir.

**Proposição 1.1.** *Seja  $M \simeq L$  com relação a  $(r_1, r_2, s)$ . Considerando  $S$  uma  $t$ -conorma,  $N$  uma negação fuzzy e  $\odot$  um e-operador em  $M$ , então segue que  $I_{S_{\odot}, N_{\odot}}^E = (I_{S,N})_{\odot}^E$ .*

**Proposição 1.2.** *Seja  $M \simeq L$  com relação a  $(r_1, r_2, s)$ ,  $M, L$  reticulados completos e  $\odot$  um e-operador em  $M$ . Se  $T$  é uma  $t$ -norma em  $M$  então  $(I_T)_{\odot}^E = I_{T_{\odot}}^E$ .*

Essas relações são de desigualdade quando as (S,N) e R-implicações são estendidas via retração.

## Referências

- [1] M. V. Mesquita, Fundamentos e Aplicações de Memórias Associativas Morfológicas Nebulosas, Tese de Doutorado em Matemática Aplicada, Unicamp, 2007.
- [2] R. Ouncharoen, V. Kreinovich and T. H. Nguyen. Why lattice-valued fuzzy values? a mathematical justification, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, volume 29, 1421-1425, 2015. DOI: 10.3233/IFS-151558.
- [3] E. S. Palmeira, On Extension of Fuzzy Connectives, Tese de Doutorado em Sistemas e Computação, UFRN, 2013.
- [4] L. A. Zadeh. Fuzzy sets, *Information and Control*, 8:338-353, 1965.