

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Controle de Caos no Modelo de Mathieu-Van der Pol com Parâmetros Incertos

Joselma Pinheiro Gonçalves Vicente ¹

UFMT - Universidade Federal de Estado Mato Grosso, Departamento de Matemática, MT, Brasil
UNESP - Univ.Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Avenida Brasil, 56, 15385-000, Ilha Solteira, SP

Fábio Roberto Chavarette ²

UNESP - Univ.Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Avenida Brasil, 56, 15385-000, Ilha Solteira, SP

Resumo. O sistema hiper caótico Mathieu-Van der Pol é um importante modelo de sistema autônomo, com quatro variáveis de estado e quatro expoentes de Lyapunov, sendo três deles positivos. Também chamado de Tri Caos, o sistema Mathieu-Van der Pol foi modelado matematicamente via acoplamento linear dos sistemas não lineares e não autônomos de Mathieu e de Van der Pol. Este artigo investiga o controle de caos do sistema Mathieu-Van der Pol hiper caótico com parâmetros incertos. Inicialmente os parâmetros são utilizados para ilustrar a estabilidade do sistema por intermédio do segundo Método de Lyapunov e posteriormente investigar a dinâmica caótica do sistema com parâmetros incertos e, finalizando, propõe-se a aplicação do Controle Linear Ótimo como metodologia para controlar o comportamento caótico do sistema. Simulações Numéricas são apresentadas para demonstrar a eficácia desta proposta.

Palavras-chave. Caos, Parâmetros Incertos, Controle Ótimo

1 Introdução

Os sistemas caóticos são sistemas dinâmicos caracterizados por alta sensibilidade às condições iniciais, autossemelhanças e fractais [9]. A alta sensibilidade às condições iniciais proporciona ao sistema não linear a característica de instabilidade, e esta instabilidade no sistema implica em sensibilidade a perturbações e erros, gerando resultados que são imprevisíveis. Esta natureza sensível dos sistemas caóticos é comumente chamada de efeito borboleta, fenômeno formulado por meio de equações matemáticas por Edward Lorenz em 1963.

As incertezas que se apresentam no processo de modelagem dos sistemas dinâmicos afetam a resposta do modelo computacional, tornando-o mas próximo da realidade. Erros podem ser controlados e reduzidos a um nível insignificante, desde que os métodos

¹joselmapinheiro@uol.com.br

²fabio.chavarette@unesp.br

numéricos e os algoritmos utilizados sejam bem conhecidos e eficientes. Os autores em [2] consideram o efeito das incertezas com as mesmas sendo associadas à diferença entre valores reais e os parâmetros do modelo matemático com uma variação de 20%.

A dinâmica hiper caótica pode ser percebida em sistemas dinâmicos com várias variáveis de estado e é caracterizada pela existência de dois ou mais expoentes positivos de Lyapunov. O sistema Mathieu -Van der Pol é um sistema hiper caótico [11], fato que o torna de grande interesse para este trabalho, que tem como principal objetivo a aplicação de um controlador que elimine seu comportamento caótico e estabilize suas vibrações incertas [2].

Controlar sistemas caóticos tem sido de grande interesse na engenharia mecânica e significa projetar leis de controle de realimentação de estado que estabilizem o sistema caótico em torno dos pontos de equilíbrio. Muitas técnicas de controle podem ser usadas para se controlar um sistema e cada técnica dispõe de peculiaridades e resultados distintos, principalmente na prática. Para estabilizar sistemas caóticos, foi utilizado, em vários trabalhos, o controle linear realimentado [2,8,10]. Neste trabalho aplicamos a metodologia do Controle Linear Ótimo (do inglês -*Optimal Linear Control* - OLC) proposta por Rafikov e Balthazar [10], que garante a aplicação do controle linear em sistemas não lineares. Dentre as principais características do Controle Linear Ótimo, destacamos a utilização do modelo de representação em espaço de estados; a obtenção do sinal de controle ótimo por meio da resolução da Equação de Riccati (do inglês, *Algebraic Riccati Equation* - ARE) e da função-objetivo parametrizada pelas matrizes \mathbf{Q} e \mathbf{R} de modo a ponderar os vetores de estado e controle, respectivamente [10].

Este artigo está organizado da seguinte maneira: na Seção 2, apresentamos o modelo de Mathieu-Van der Pol [11], sua dinâmica não linear e a inclusão dos parâmetros incertos no sistema [8]. Na Seção 3, nós discutimos a técnica do projeto de controle com incertezas. Na Seção 4, resumimos os principais resultados obtidos neste artigo.

2 Modelo de Mathieu-Van der Pol

Um novo sistema hiper caótico com três expoentes positivos de Lyapunov, também chamado Tri Caos, é proposto acoplando-se os sistemas de Mathieu e de Van der Pol obtendo-se um novo sistema de quarta ordem, sistema autônomo Mathieu-Van der Pol, sendo este o modelo matemático representado como [11]:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(a + bx_3)x_1 - (a + bx_3)x_1^3 - cx_2 + dx_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -ex_3 + f(1 - x_3^2)x_4 + gx_1\end{aligned}\tag{1}$$

sendo \dot{x}_1 , \dot{x}_2 , \dot{x}_3 e \dot{x}_4 os quatros estados do sistema, a, b, c, d, e, f e g os parâmetros do sistema de Mathieu-Van der Pol [11]. Para a investigação dos pontos instáveis do sistema foi obtido um diagrama de estabilidade por intermédio do Segundo Método de estabilidade de Lyapunov utilizando-se os parâmetros e condições iniciais ilustrados Tabela 1.

Tabela 1: Parâmetros e Condições iniciais.

a	b	c	d	e	f	g	x_1	x_2	x_3	x_4
91.7	1 - 9	0.01	91	87.001	10 - 25	9.0572	0.01	0.01	0.01	0.01

Após a implementação do Segundo Método de Estabilidade de Lyapunov para o sistema Mathieu-Van der Pol foi obtido o seguinte diagrama ilustrado na Figura 1.

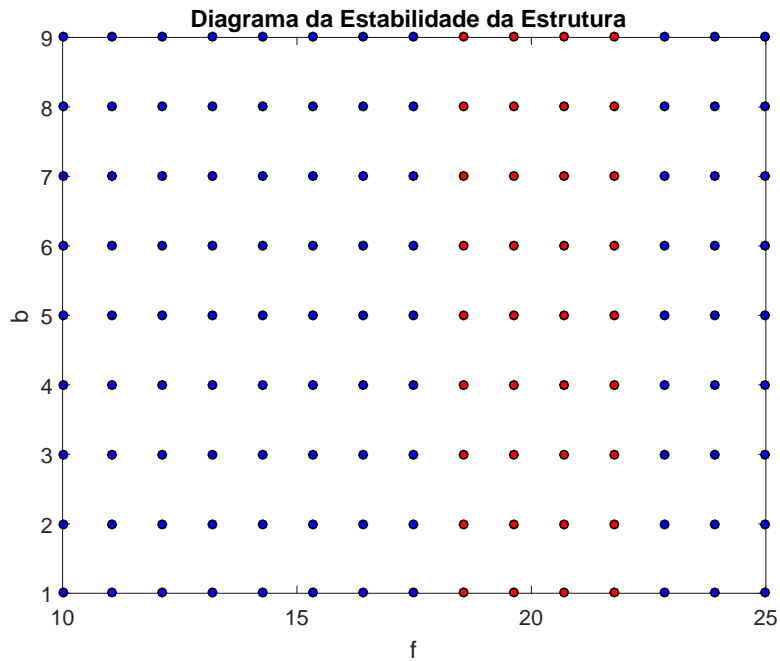


Figura 1: Estabilidade Estrutural.

De acordo com o diagrama de estabilidade da Figura 1, pode-se notar que os pontos na cor azul são de comportamento estáveis e os pontos na cor vermelha possuem comportamento instável.

Fixando os parâmetros numa região instável, sendo $b = 5$ e $f = 18$, calcula-se os expoentes de Lyapunov do sistema Mathieu-Van der Pol, onde constata-se que o sistema apresenta quatro expoentes de Lyapunov, sendo três deles com valores positivos, a saber, $\lambda_1 = 12.1261$; $\lambda_2 = 7.7713$; $\lambda_3 = 7.7814$ e um expoente com valor negativo $\lambda_4 = -9.6868$, demonstrando que o sistema está em caos [12].

2.1 Incluindo Parâmetros Incertos no Modelo

As diversas e atuais aplicações na área da engenharia mecânica necessitam que os sistemas trabalhem com parâmetros ótimos sob determinadas condições de operações, como a robustez, por exemplo, que demonstram a necessidade de se desenvolver modelos

numéricos realistas que consideram adequadamente incertezas nos parâmetros e nas entradas dos sistemas. Na área da engenharia mecânica, as incertezas têm sido consideradas em diversos ramos como, a dinâmica de estruturas [4], dinâmica de rotores [3, 5] e robôs manipuladores [6], entre outros.

No processo de modelagem dos sistemas dinâmicos as incertezas podem ser consideradas através de uma formulação probabilística, com intervalos previamente definidos, ou ainda, através da teoria das possibilidades [7].

Para se considerar o efeito das incertezas, as mesmas serão associadas à diferença entre valores reais e os parâmetros do modelo matemático com uma variação de 20%, onde $r(t) \sim u[0, 1] \forall t$ [2] tornando-se $\bar{a} = 73.36 + 36.68r(t)$, $\bar{b} = 4.024 + 2.012r(t)$, $\bar{c} = 0.008 + 0.002r(t)$, $\bar{d} = 72.8 + 36.4r(t)$, $\bar{e} = 69.6008 + 34.8004r(t)$, $\bar{f} = 14.4 + 7.2r(t)$ e $\bar{g} = 7.5928 + 3.8288r(t)$.

3 Projeto de Controle de Incertezas

Aplicando a teoria proposta por [10], podemos projetar o controlador com a função de controle U e $\dot{x} = Ax + g(x)$, onde $x \in R^n$ é um vetor de estado, $A \in R^{n \times n}$ é uma matriz constante, $g(x)$ é vetor, cujos elementos são funções contínuas. Reescrevendo o sistema na forma de espaço de estados, temos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + U \\ \dot{x}_2 &= -(a + bx_3)x_1 - (a + bx_3)x_1^3 - cx_2 + dx_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -ex_3 + f(1 - x_3^2)x_4 + gx_1 \end{aligned} \tag{2}$$

sendo a matriz constante $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, a diferença entre a trajetória e o caminho desejado

$y = \begin{pmatrix} x_1 - \tilde{x}_1 \\ x_2 - \tilde{x}_2 \\ x_3 - \tilde{x}_3 \\ x_4 - \tilde{x}_4 \end{pmatrix}$, o caminho desejado $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, a matriz identidade de ordem 4, $Q = I_4$ e

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -91.7777 & -0.0100 & 90.9497 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9.5071 & 0 & -87.0046 & 17.9982 \end{pmatrix}$ onde a controlabilidade da matriz R do

sistema para o par $[A, B]$ é obtida por $R = [B|AB|A^2B|A^3B]$.

Assim, $R = (1)$. Em seguida, a matriz $P(t)$ é dada por

$$P = 10^3 \begin{pmatrix} 0.1587 & 0.0003 & -0.3699 & 0.0136 \\ 0.0003 & 0.0016 & -0.0103 & -0.0029 \\ -0.3699 & -0.0103 & 3.1495 & -0.01426 \\ 0.0136 & -0.0029 & -0.0142 & 0.0409 \end{pmatrix}$$

e o controle ótimo $u = 14.0153x_1 - 1.2919x_2 - 24.5948x_3 + 38.0333x_4$.

Para realizar a simulação numérica do sistema Mathieu-Van der Pol usou-se a variação temporal de 0 a 6, parâmetros e condições iniciais ilustrados Tabela 1 e as trajetórias do sistema podem ser vistas na Figura 2. Segundo a verificação de controle ótimo [1], sua função é numericamente calculada por $L(t) = y^T Q y$, onde $L(t)$ é definida positiva.

Nas simulações numéricas ilustradas nas Figuras deste trabalho, utilizou-se o método de Runge Kutta de 4ª ordem e os gráficos do histórico no tempo e espectro da frequência para os quatro estados do sistema. Todos os algoritmos foram implementados no software livre Octave.

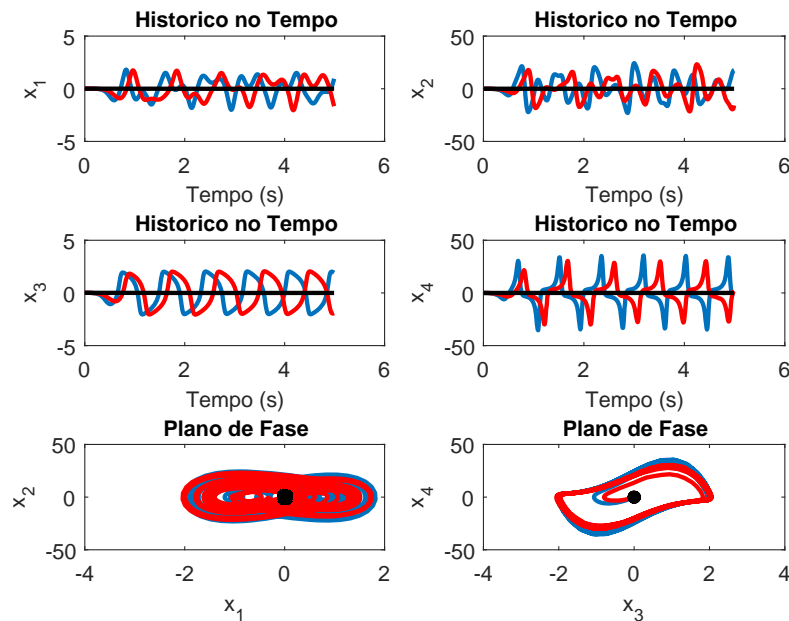


Figura 2: Comportamento Dinâmico.

A Figura 2 mostra em azul o comportamento do sistema com parâmetros fixos, em vermelho o comportamento do sistema com parâmetros incertos e em preto o comportamento do sistema controlado.

4 Conclusões

Neste trabalho foi proposto um controle do comportamento caótico do sistema Mathieu-Van der Pol com parâmetros incertos. A técnica de controle linear ótimo foi aplicada ao

sistema com o objetivo de solucionar as vibrações incertas e eliminar o comportamento caótico conduzindo as oscilações a um ponto estável. Os resultados mostram que o controlador proposto obteve sucesso com eficiência.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao Laboratório de Sistemas Complexos (Sisplexos) da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP.

Referências

- [1] L. Čanin. Dynamics of the non-ideal mechanical systems: a review. *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, volume 4-2, pages 75-86, 2010.
- [2] F. R. Chavarette. Optimal Linear Control to Parametric Uncertainties. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, volume 83, pages 539-548, 2013.
- [3] J. Didier, B. Faverjon, J. J. Sinou. Analyzing the dynamic response of a rotor system under uncertain parameters by polynomial chaos expansion. *Journal of Vibration and Control*, volume 18-5, pages 587-607, 2012.
- [4] R. G. Ghanem, P. D. Spanos. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Courier Dover Publications, 1991.
- [5] E. H. Koroishi, A. A. Cavalini Jr, A. M. G. de Lima, V. Stefen Jr. Stochastics modeling of exible rotors. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, volume 34 (Special Issue), pages 597-603, 2012.
- [6] F. A. Lara-Molina, J. M. Rosario, D. Dumur, P. Wenger. *Generalized predictive control of parallel robots*. In: Kozłowski, K. (Ed.), *Robot Motion and Control 2011*. Springer London, volume 422 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 159-169, 2012.
- [7] B. Moller, M. Beer. *Fuzzy Randomness, Uncertainty in Civil Engineering and Computational Mechanics*. Springer-Verlag, 2004.
- [8] A. Molter, M. Rafikov. *Controle ótimo em agroecossistemas usando SDRE, tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, volume 12-3, pages 221-232, 2011. DOI:10.5540/tema.2011.012.03.0221.
- [9] L.H.A. Monteiro. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo, Brasil, Editora Livraria da Física, 2002.
- [10] M. Rafikov, J. M. Balthazar, On control and synchronization in chaotic and hyperchaotic system via linear control feedback. *Communication on Non-linear science and numerical simulation*, volume 1397, pages 1246-1255, 2008. DOI:10.1016/j.cnsns.2006.12.011.

- [11] L. Shih-Yu, H. Sheng-Chieh, Y. Cheng-Hsiung, G. Zheng-Ming, Generating tri-chaos attractors with three positive Lyapunov exponents in new four order system via linear coupling, *Nonlinear Dynamics*, volume 69, pages 805-816, 2012.
- [12] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano. Determining Lyapunov Exponents from a Time Series, *Physica*, volume 16D, pages 285-317, 1985.