Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Linearização fracionária de sistemas dinâmicos

Eliana Contharteze Grigoletto [1]
Departamento de Bioprocessos e Biotecnologia, FCA, UNESP, Botucatu, SP
Junior Cesar Alves Soares [2]
Departamento de Matemática, UNEMAT, Barra do Bugres, MT
Samuel Ferreira Batista [3]
Departamento de Bioprocessos e Biotecnologia, FCA, UNESP, Botucatu, SP

1 Introdução

Quando o tempo é considerado contínuo, um sistema dinâmico não linear é composto por equações diferenciais não lineares, cuja solução analítica é de difícil ou impossível obtenção. Se o sistema dinâmico é linear e com coeficientes constantes, sua resolução é bem simples. Entretanto, na maioria dos casos, os problemas que surgem no mundo real são não lineares e não podem ser resolvidos, ou seja, não existe um método para resolver tais problemas [1]. Um método para encontrar soluções aproximadas para equações diferenciais não lineares é a linearização dessas equações perto de uma solução constante [4].

O cálculo fracionário é o ramo da matemática que estuda integrais e derivadas de ordem não inteira e tem ocupado um lugar de destaque na modelagem de diversos fenômenos nas áreas de ciência e engenharia [2, 3]. Propomos a utilização de derivadas fracionárias na linearização de equações diferenciais não lineares.

2 Linearização fracionária

Considere a linearização fracionária de uma função real f, em $x = a$, dada por

$$\mathrm{L}^{\alpha}(x) = f(a) + \left({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}_{a+} f\right)(a)\,(x-a)\,, \tag{1}$$

onde

$$\left({}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}_{b+} f\right)(x) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\int_b^x \frac{f^{(n)}(\tau)}{(x-\tau)^{1-n+\alpha}}\,\mathrm{d}\tau\right), \tag{2}$$

é a derivada fracionária de Caputo à esquerda, de ordem $\alpha > 0$, onde $\Gamma(\cdot)$ é a função gama e $n = [\alpha] + 1$, onde $[\alpha]$ indica a parte inteira de α. Por exemplo, se $f(x) = (x-5)^3$, a figura a seguir exibe a representação gráfica para $\mathrm{L}^{\alpha}(x)$, em $a = 6$. Neste caso, $b = 5$ na equação (2).

[1]elianac@fca.unesp.br
[2]juniorcasoares@unemat.br
[3]samuel.ferreira-batista@unesp.br

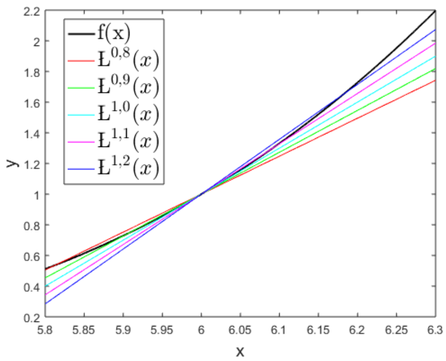

Figura 1: Linearização fracionária de $f(x) = (x-5)^3$.

A linearização fracionária em torno do ponto de equilíbrio $a = \dfrac{\pi}{2}$ da equação diferencial não linear:

$$\dot{x} = \cos x, \tag{3}$$

é dada por

$$\dot{x} \sim \frac{2^\alpha}{\pi^\alpha} \mathrm{E}_{2,1-\alpha}\left(-\frac{\pi^2}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \tag{4}$$

onde $\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(\cdot)$ é a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros [3]. Em particular, se $\alpha = 1$ na equação (4), obtemos a linearização com derivada de ordem inteira: $\dot{x} \sim -x + \dfrac{\pi}{2}$.

3 Conclusões

Pretendemos estudar a linearização fracionária de equações diferenciais não lineares, comparando com a linearização clássica com derivada de ordem inteira, e aplicar os resultados na análise de sistemas dinâmicos não lineares, descritos com derivadas de ordem inteira ou fracionária.

Agradecimentos

O autor Samuel é grato à FAPESP 2018/06037-7 pelo financiamento da pesquisa.

Referências

[1] W. H. Chen, D. J. Ballance and P. J. Gawthrop. Optimal control of nonlinear systems: A predictive control approach, *Automatica*, 39:633–641, 2003.

[2] R. Hilfer. *Applications of Fractional Calculus in Physics*. World Scientific, Singapore, 2000.

[3] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam, 2006.

[4] I. Michailidis, S. Baldi, E. B. Kosmatopoulos and P. A. Ioannou. Adaptive Optimal Control for Large-Scale Nonlinear Systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, 62:5567–5577, 2017.