Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Propriedades ergódicas da Transformação de Gauss

Hermes Alves Neto [1]
Instituto de Ciências Exatas, UFF, Volta Redonda, RJ
Miguel Schnoor [2]
Instituto de Ciências Exatas, UFF, Volta Redonda, RJ

## 1 Introdução

O sistema dinâmico definido pela Transformação de Gauss possui uma relação com a expansão em frações contínuas de um número real e, estudando as suas propriedades ergódicas, é possível obter resultados interessantes na teoria dos números.

Nosso objetivo é mostrar como é possível obter a distribuição de dígitos (*quocientes*) de quase todo número, com relação à medida de Lebesgue, do intervalo $[0,1)$ na sua expansão em frações contínuas e, além disso, mostrar que a probabilidade de um certo $c \in \mathbb{N}$ aparecer infinitas vezes na expansão em frações contínuas de um número contido no intervalo $\left[\frac{1}{c+1}, \frac{1}{c}\right) \subset [0,1)$ é de 100%.

## 2 Resultados e discussões

Dado $x \in [0,1)$ denotaremos sua expansão em frações contínuas por $x = [a_1(x), a_2(x), ...]$, onde $a_n(x) \in \mathbb{N}$ é a sequência de *quocientes* de $x$.

**Definição 2.1.** *A Transformação de Gauss $T : [0,1) \to [0,1)$ é definida por $T(x) = 0$, se $x = 0$ e $T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$, se $x \neq 0$, onde $\lfloor x \rfloor$ representa a parte inteira de $x$.*

Temos que $\forall x \in (0,1)$, $a_n(x) = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor$. Note então que, se $T^{n-1}(x) \in \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$, então $a_n = k$.

**Definição 2.2.** *A medida de Lebesgue é dada por $\lambda([a,b]) = b - a$, independente do intervalo ser aberto ou fechado.*

**Definição 2.3.** *A medida de Gauss é dada por* $\mu(E) = \dfrac{1}{\log 2} \displaystyle\int_E \dfrac{1}{x+1} dx.$

**Definição 2.4.** *Seja $(M, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : M \to M$ uma transformação mensurável. Dizemos que $\mu$ é invariante por $f$ se $\forall E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) = \mu(f^{-1}(E))$.*

[1] hermes.alves.neto@gmail.com
[2] migaks@gmail.com

**Afirmação 2.1.** *A medida de Gauss é invariante por $T$ e é absolutamente contínua em relação à medida de Lebesgue, isto é, todos conjuntos com medida Gauss nula, tem medida de Lebesgue nula.*

**Teorema 2.1.** ***(de Recorrência de Poincaré):*** *Seja $(M, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $f : M \to M$ uma função mensurável e $\mu$ finita e invariante por $f$. Se $E \subset M$ é mensurável tal que $\mu(E) > 0$, então para $\mu$-quase todo ponto $x \in E$, existe sequência $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_n}(x) \in E$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Como consequência, do Teorema de Recorrência, dado $I_c = \left[\frac{1}{c+1}, \frac{1}{c}\right) \subset [0, 1)$, com $c \in \mathbb{N}$, temos que pra $\mu$-q.t.p. de $I_c$, $\exists k_n \in \mathbb{N}$ tal que $T^{k_n}(x) \in I_c$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo $a_{k_n+1} = c$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Portanto, a probabilidade de $c$ aparecer infinitas vezes na expansão em frações contínuas de um número contido em $I_c$ é de 100%.

**Definição 2.5.** *Dado $(M, \mathcal{A})$ um espaço mensurável e $T : M \to M$ mensurável. Uma probabilidade $\nu$ nesse espaço é ergódica em relação a $T$ se $T^{-1}(A) = A \Rightarrow \nu(A) = 1$ ou $\nu(A) = 0$, onde $A \in \mathcal{A}$.*

**Afirmação 2.2.** *A medida de Gauss é ergódica em relação à Transformação de Gauss.*

**Teorema 2.2.** ***(Ergódico de Birkhoff):*** *Seja $T : M \to M$ uma transformação mensurável e $\mu$ uma probabilidade ergódica em relação a $T$. Então vale em $\mu$-q.t.p. de $M$, que $\forall f \in \mathcal{L}^1(\mu)$,*

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j(x) \to \int f d\mu. \tag{1}$$

Como consequêcia do Teorema Ergódico de Birkhoff, é possível obter a frequência que um certo número $c \in \mathbb{N}$ aparece na expansão em frações contínuas de $\mu$-q.t.p. (ou $\lambda$-q.t.p.) de $[0, 1)$. Tomando $f = \mathcal{X}_{I_c} : [0, 1) \to \mathbb{R}$, definida por $\mathcal{X}_{I_c}(x) = 0$ se $x \notin I_c$ e $\mathcal{X}_{I_c}(x) = 1$ se $x \in I_c$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{X}_{I_c} \circ T^j(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\{j \in \{1, ..., n\}; a_{j+1}(x) \in I_c\}}{n} = \mu(I_c). \tag{2}$$

Portanto a frequência com que $c$ aparece nas expansões em frações contínuas de $\mu$-q.t.p. (ou $\lambda$-q.t.p.) de $[0, 1)$ é $\mu(I_c)$.

## Agradecimentos

Agradeço à FAPERJ pelo apoio e incentivo da minha iniciação científica.

## Referências

[1] DIAZ, L. J. ; JORGE, D. R. . *Uma introdução aos sistemas dinâmicos via frações contínuas. 1ª. ed.* Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[2] OLIVEIRA, K. I. M., VIANA, M., Fundamentos da Teoria Ergódica, 2005.

 