Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Utilização de métodos numéricos na resolução de equações diferenciais que descrevem problemas de sistema massa-mola com amortecimento

Modesto Valci Moreira Lopes[1]
Caroline Galvão Toscano[2]
Matheus da Silva Menezes[3]
Ivan Mezzomo[4]
Departamento de Ciências, Matemática e Estatística, UFERSA, Mossoró - RN

Esse trabalho tem como objetivo analisar a eficiência da utilização dos métodos numéricos de Heun e Rugen-Kutta na resolução de equações diferenciais que descrevem problemas de sistema massa-mola com amortecimento, em relação às soluções analíticas obtidas na literatura [2]. Considere y_i como o valor estimado da função no ponto x_i, h o tamanho do passo e $f(x_i, y_i)$ a derivada da função da curva a ser descrita. O método de Heun, utiliza o cálculo da primeira derivada da função $y = f(x)$ em dois pontos, um no ponto inicial e outro no ponto final, onde a inclinação será dada pela média entre as duas derivadas. Já os Métodos de Runge-Kutta tem como base os polinômios de Taylor. O método utilizado nesse trabalho corresponde ao Método de Runge-Kutta de 4ª ordem, com coeficientes k_1, k_2, k_3 e k_4, em sua versão clássica.

Para análise do sistema massa mola, considere m a massa do corpo, c a constante de amortecimento e k a constante da mola, sendo x a deformação da mola na perturbação e t o instante de tempo analisado, resultando na seguinte equação que descreve a vibração livre com amortecimento viscoso $mx'' + cx' + kx = 0$.

Como os problemas analisados são de segunda ordem, e os respectivos métodos numéricos utilizados apenas se aplicam a equações de primeira ordem, é necessário então que haja a redução da mesma para sua posterior execução. A redução de ordem foi realizada a partir da utilização de uma técnica que consiste em reescrever a equação $y''+a_1y'+a_0y = 0$ da seguinte forma: $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y_1$ através da mudança de variável, resultando em $z' + a_1z + a_0y = 0$ com $y(x_0) = y_0$ e $z(x_0) = y_1$.

De forma a ilustrar a situação analítica e sua respectiva solução numérica, os métodos foram implementados no software Scilab, versão 6.0 em um computador com processador intel Core i5 com 4Gb de memória RAM e sistema operacional Windows 10. A simulação considerou três casos de amortecimento: sistema superamortecido (1) ; sistema criticamente amortecido (2); e sistema subamortecido (3), todos com as mesmas condições iniciais e com tamanho de passo fixo $h = 0.0001$.

[1]modsval@gmail.com
[2]caroltoscano.cn@hotmail.com.br
[3]matheus@ufersa.edu.br
[4]imezzomo@ufersa.edu.br

$$1,2x'' + 100x' + 180x = 0 \quad y(0) = 0,15m \quad z(0) = 0m/s \tag{1}$$
$$1,2x'' + 29,4x' + 180x = 0 \quad y(0) = 0,15m \quad z(0) = 0m/s \tag{2}$$
$$1,2x'' + 3x' + 180x = 0 \quad y(0) = 0,15m \quad z(0) = 0m/s \tag{3}$$

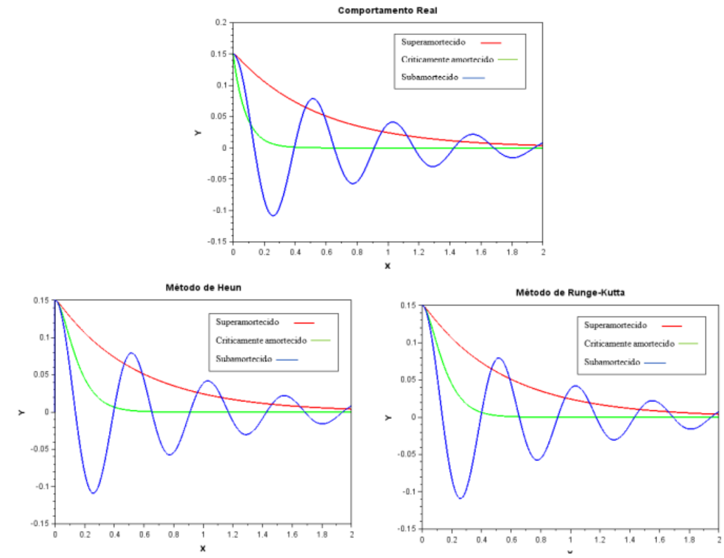

Figura 1: Resultados dos Experimentos.

A partir da análise dos gráficos, pode-se perceber que os métodos numéricos de Heun e Runge-Kutta obtiveram êxito em estimar as curvas dos casos superamortecido e subamortecido sendo seus respectivos erros absolutos médios de $8,8650 \times 10^{-6}$ e $1,0911 \times 10^{-2}$ para Heun e $8,8542 \times 10^{-6}$ e $1,0901 \times 10^{-2}$ para Runge-Kutta. Com base nos erros obtidos é válido afirmar que Runge-Kutta demonstrou melhor aproximação dos dados reais. No entanto os métodos não conseguiram estimar o momento da perturbação no caso criticamente amortecido, acompanhando a curva somente no momento em que ela atingiu o ponto de equilíbrio ($y \simeq 0$), uma vez que no caso real ela ocorre em $0 \leq x \leq 0,2$ e nos métodos ela ocorre em $0 \leq x \leq 0,3$. Uma causa possível desses acúmulos de erros pode estar contido na utilização da técnica de redução de ordem.

Agradecimentos: Agradecemos o apoio financeiro da UFERSA e do CNPQ na realização deste trabalho.

Referências

[1] S. Chapra. *Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB para Engenheiros e Cientistas.* 3 ed., Bookman, Porto Alegre, 2013.

[2] D.G. Zill. E*quações Diferenciais com aplicações em modelagem.* 9 ed., Cengage Learning, São Paulo, 2011.

[3] R. L. Burden and D. Faires. Análise Numérica. Cengage, São Paulo, 2008.

