

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

---

# A dinâmica de um pêndulo simples não forçado: Análise Numérica Versus Análise Qualitativa

Lara Morinaga Matida <sup>1</sup>

Instituto Federal de Goiás campus Aparecida de Goiânia, Goiás

Diogo Gonçalves Dias<sup>2</sup>

Instituto Federal de Goiás campus Aparecida de Goiânia, Goiás

## 1 Introdução

O comportamento dinâmico das oscilações de um pêndulo simples não forçado é objeto de pesquisa desde muitos séculos atrás [1]. Este problema vem recebendo atenção de pesquisadores de áreas diversas como física, matemática e engenharias. Além disso, tem contribuído para o desenvolvimento e aprimoramento de métodos de resolução de equações diferenciais [2]. Podemos dividir tais métodos em três classes distintas: métodos analíticos (quantitativos), métodos qualitativos e métodos numéricos. O presente projeto pretende estabelecer uma análise comparativa entre o comportamento dinâmico do pêndulo simples, com amortecimento e sem amortecimento, sob a ótica da teoria qualitativa das EDO's e sob a ótica do método numérico de Runge-Kutta de quarta ordem (RK<sub>4</sub>).

## 2 Metodologia e Resultados

Primeiramente, realizou-se uma revisão bibliográfica acerca das oscilações do pêndulo simples não forçado, a teoria qualitativa de EDO's e o método RK<sub>4</sub>. O procedimento que seguiu foi analisar as equações do pêndulo com e sem amortecimento. Portanto, houve a discretização em 4 casos, determinados pela manipulação das equações do pêndulo e análise dos coeficientes. Dessa forma, 1 para a situação sem amortecimento e os outros 3 para a com o amortecimento. A teoria qualitativa de EDO's foi aplicada manualmente, já o método RK<sub>4</sub> foi implantado e aplicado ao problema mediante da planilha eletrônica, por processo interativo. Por fim, procedeu-se a análise comparativa dos comportamentos dinâmicos obtidos pelo retrato de fase e os gráficos. Assim, diante dos retratos de fase e gráficos apresentados abaixo verifica-se que nos diversos casos expostos o comportamento dinâmico é o mesmo. Neste sentido, segue as figuras 1, 2, 3 e 4, com a sobreposição de um

---

<sup>1</sup>laramatida@gmail.com

<sup>2</sup>diogodias.gd@gmail.com

resultado com o outro. Observa-se que os retratos de fase são representados na cor cinza já os gráficos do método numérico coloridos.

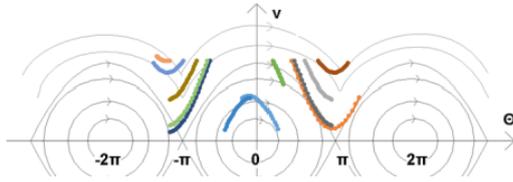


Figura 1: Comparação gráfica das análises, pêndulo sem amortecimento.

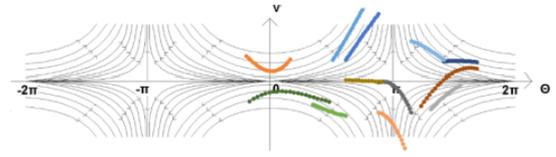


Figura 2: Comparação gráfica das análises, no caso:  $\mu = 2\omega$ .

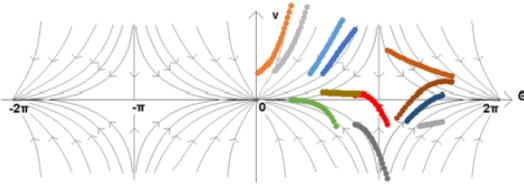


Figura 3: Comparação gráfica das análises, no caso:  $\mu > 2\omega$ .

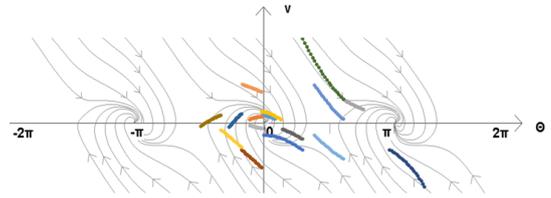


Figura 4: Comparação gráfica das análises, no caso:  $\mu < 2\omega$ .

### 3 Conclusões

Na análise qualitativa de EDO's os retratos de fase não são capazes de representar a deformação existente nos pontos críticos, estes apresentam apenas a sua singularidade, a qual caracteriza o comportamento dinâmico, mas sem precisão. Contudo, sua implementação é muito simples e rápida. Apesar da implementação do método  $RK_4$  ser na maioria das vezes mais trabalhosa em relação ao método qualitativo, sua vantagem é a capacidade de obter soluções gráficas com grande exatidão. Também, caso seja necessário, é possível calcular o erro e compensá-lo nos resultados obtidos. Ademais, o  $RK_4$  representa as deformações existentes nos pontos críticos, as quais foram mais evidentes nos gráficos do pêndulo simples com amortecimento. Afinal, as duas análises, demonstraram eficiência cada qual com a sua teoria.

### Referências

- [1] GAULD, C. Science & Education, v.13, p. 811, 2014.
- [2] PERKO, L. Differential Equations and Dynamical Systems third edition. New York: Springer, 2000.