

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Compondo/decompondo poliedros convexos com o GeoGebra 3D

Rudimar Luiz Nós¹
UTFPR, Câmpus Curitiba
Victoria Mazotti Rodrigues da Silva²
PROFMAT UTFPRCT

Resumo. Apresentamos neste trabalho duas estratégias para calcular o volume de poliedros convexos: a decomposição do poliedro em poliedros de volume conhecido, tais como prismas e pirâmides; a eliminação de poliedros de volume conhecido de um poliedro de volume também conhecido. Aplicamos a primeira estratégia para calcular o volume do octaedro triakis, um poliedro de Catalan, e empregamos o software gratuito de geometria dinâmica GeoGebra 3D para a construção de poliedros convexos e também para as composições/decomposições. Concluímos que o aplicativo é uma excelente ferramenta para estabelecer estratégias para o cálculo do volume de poliedros convexos.

Palavras-chave. Cuboctaedro, Dodecaedro Rômbico, Hexaedro Tetrakis, Octaedro Triakis, Volume, Operações de transformação sobre poliedros.

1 Introdução

Conforme [6, 7], “o cálculo do volume de um poliedro convexo pode ser uma tarefa complexa”. Nesse cálculo, podemos decompor o poliedro em poliedros com volume conhecido, como prismas e pirâmides. A Figura 1 mostra a decomposição do icosaedro regular, um poliedro de Platão, em vinte pirâmides cujas bases são as faces do icosaedro e cujas arestas laterais têm a medida do raio da esfera circunscrita ao icosaedro. Em outra estratégia, podemos eliminar poliedros de volume conhecido, como prismas e pirâmides, de um poliedro de volume também conhecido, como o cubo por exemplo. A Figura 2 ilustra a obtenção do dodecaedro rômbico, um poliedro de Catalan³, a partir de sucessivos truncamentos do cubo.

Ainda segundo [6, 7]:

O cálculo do volume de um poliedro convexo é um tema pertinente à formação geométrica do professor de matemática. A escassez de referências bibliográficas

¹rudimarnos@utfpr.edu.br.

²victoriamazotti@msn.com

³Os poliedros de Catalan (Eugene Catalan (1814-1894)) são os poliedros duais dos poliedros Arquimedianos. O dual de um poliedro tem por vértices os centros das faces do poliedro.

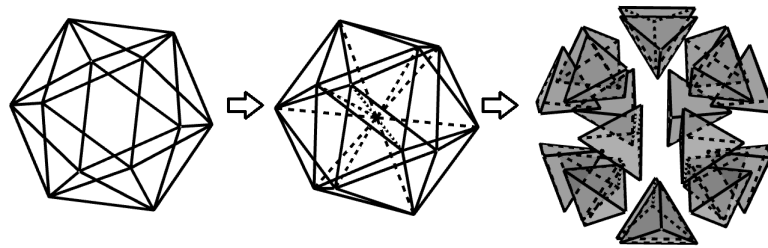


Figura 1: Decomposição do icosaedro regular em tetraedros equivalentes [6].

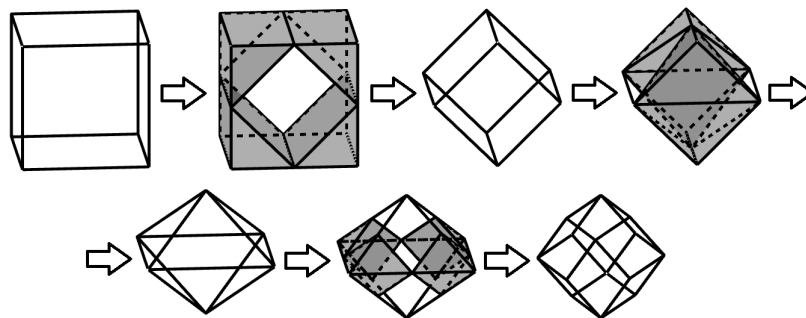


Figura 2: Truncamentos sucessivos do cubo para determinar o dodecaedro rômico [6].

em português justifica a elaboração de material didático sobre o tema. Além disso, há na natureza cristais e organismos vivos com formatos poliédricos. O volume de uma pedra preciosa e de uma massa viral, por exemplo, são medidas que devem, sob certas circunstâncias, ser calculadas.

2 Volume do octaedro triakis

O octaedro triakis, um poliedro de Catalan, pode ser obtido por acumulação do octaedro regular, um poliedro de Platão [1], ao acoplarmos uma pirâmide triangular em cada face, como na Figura 3.

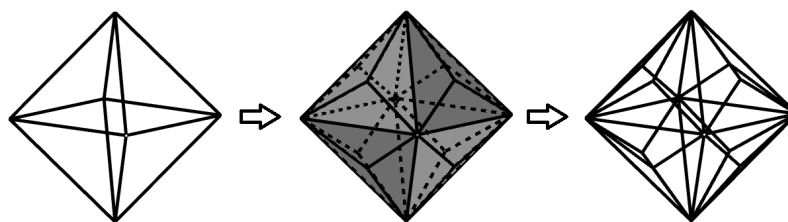


Figura 3: Acumulação do octaedro regular [6].

O octaedro triakis é um poliedro convexo composto por 24 faces, 36 arestas e 14 vértices [8], como mostra a Figura 4. Suas faces são formadas por triângulos isósceles e

suas arestas têm dois comprimentos:

1. as doze maiores são as arestas do octaedro regular sobre cujas faces se faz a acumulação;
2. as vinte e quatro menores são as arestas laterais das pirâmides triangulares acopladas às faces do octaedro regular na acumulação.

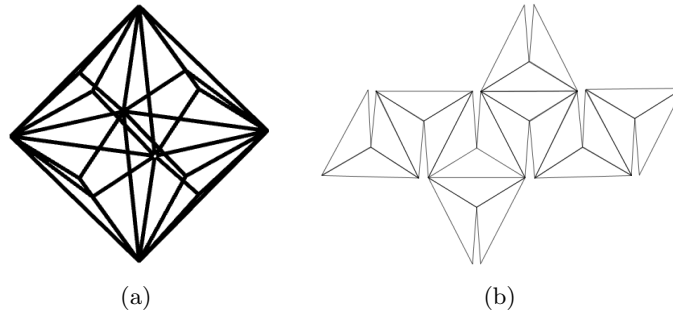


Figura 4: Octaedro triakis: (a) sólido; (b) planificação - [6].

Dessa forma, o volume V do octaedro triakis é dado por

$$V = V_{or} + 8V_{pt}, \tag{1}$$

onde V_{or} é o volume do octaedro regular e V_{pt} é o volume da pirâmide triangular acoplada.

A pirâmide triangular tem a forma e as dimensões daquela ilustrada na Figura 5, onde a é a medida da aresta do octaedro regular e x é a medida da aresta lateral da pirâmide acoplada. Para calcular o volume dessa pirâmide, precisamos estabelecer uma relação entre as arestas curtas e as arestas longas. Segundo [8], ao formarmos o octaedro triakis a partir de seu dual, o cubo truncado, com aresta unitária, obtemos um octaedro triakis com a maior aresta medindo $2 + \sqrt{2}$ e a menor aresta medindo 2.

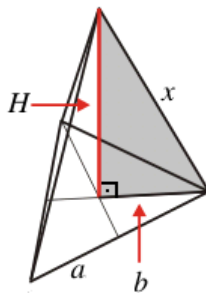


Figura 5: Pirâmide da acumulação do octaedro regular [6].

Considerando a a medida da maior aresta, temos, por semelhança de triângulos, que a medida da menor aresta é $x = (2 - \sqrt{2}) a$.

Sabemos que a base da pirâmide é um triângulo equilátero. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da Figura 5, de hipotenusa x e catetos $b = \frac{2\sqrt{3}}{3} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a$ e H , onde H é a altura da pirâmide, obtemos:

$$x^2 = H^2 + b^2;$$

$$\left(a(2 - \sqrt{2}) \right)^2 = H^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2 ;$$

$$\begin{aligned}
 H^2 &= a^2 \left(6 - 4\sqrt{2} \right) - \frac{a^2}{3}; \\
 H^2 &= \frac{a^2}{3} \left(17 - 12\sqrt{2} \right); \\
 H &= \frac{a}{\sqrt{3}} \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}; \\
 H &= \frac{\sqrt{51 - 36\sqrt{2}}}{3} a.
 \end{aligned} \tag{2}$$

O radical duplo em (2) pode ser escrito como

$$\sqrt{51 - 36\sqrt{2}} = \sqrt{51 - \sqrt{2592}}. \tag{3}$$

Empregando a relação descrita em [4, 5] para transformar o radical duplo (3), com $A = 51$ e $B = 2592$, em uma diferença de radicais simples, obtemos:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{51 - \sqrt{2592}} &= \sqrt{\frac{51 + \sqrt{51^2 - 2592}}{2}} - \sqrt{\frac{51 - \sqrt{51^2 - 2592}}{2}}; \\
 \sqrt{51 - \sqrt{2592}} &= \sqrt{\frac{51 + \sqrt{9}}{2}} - \sqrt{\frac{51 - \sqrt{9}}{2}}; \\
 \sqrt{51 - \sqrt{2592}} &= \sqrt{\frac{51 + 3}{2}} - \sqrt{\frac{51 - 3}{2}}; \\
 \sqrt{51 - \sqrt{2592}} &= \sqrt{\frac{54}{2}} - \sqrt{\frac{48}{2}}; \\
 \sqrt{51 - \sqrt{2592}} &= \sqrt{27} - \sqrt{24}; \\
 \sqrt{51 - \sqrt{2592}} &= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Substituindo (4) em (2), temos que:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{a}{3} \left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{6} \right); \\
 H &= \left(\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{6}}{3} \right) a.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Dessa forma, empregando (5), temos que o volume V_{pt} da pirâmide triangular, cuja área da base é A_b , é dado por:

$$\begin{aligned}
 V_{pt} &= \frac{1}{3} A_b H; \\
 V_{pt} &= \frac{1}{3} \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} a \left(\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{6}}{3} \right); \\
 V_{pt} &= \frac{a^3}{36} \left(9 - 6\sqrt{2} \right);
 \end{aligned}$$

$$V_{pt} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{12} a^3. \quad (6)$$

O volume V_{or} do octaedro regular é dado por $V_{or} = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3$ [6]. Substituindo esta medida e (6) em (1), concluímos que o volume V do octaedro triakis é igual a:

$$\begin{aligned} V &= V_{or} + 8V_{pt}; \\ V &= \frac{a^3\sqrt{2}}{3} + 8\frac{a^3}{12} (3 - 2\sqrt{2}); \\ V &= (2 - \sqrt{2}) a^3, \end{aligned} \quad (7)$$

onde a é a medida da maior aresta do poliedro (ou a medida da aresta do octaedro regular).

Podemos também determinar o volume do octaedro triakis a partir da medida de sua menor aresta x . Para tal, expressamos a em função de x . Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned} x &= a(2 - \sqrt{2}); \\ a &= \frac{x}{2 - \sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Substituindo (8) em (7), concluímos que:

$$\begin{aligned} V &= \left(\frac{x}{2 - \sqrt{2}}\right)^3 (2 - \sqrt{2}); \\ V &= \frac{x^3}{(2 - \sqrt{2})^2}; \\ V &= \frac{x^3}{2(3 - 2\sqrt{2})} \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}}; \\ V &= \frac{x^3}{2} (3 + 2\sqrt{2}); \\ V &= \frac{2\sqrt{2} + 3}{2} x^3, \end{aligned}$$

onde x é a medida da menor aresta do poliedro (ou a aresta lateral da pirâmide acoplada na acumulação do octaedro regular).

3 Explorando o GeoGebra 3D

O GeoGebra 3D pode ser empregado para compor/decompor poliedros convexos e assim estabelecer estratégias para calcular o volume desses poliedros. Exemplificamos com o hexaedro tetrakis, um poliedro de Catalan, e com o cuboctaedro, um poliedro Arquimedeano⁴. O hexaedro tetrakis pode ser determinado pela acumulação de uma pirâmide

⁴Poliedro convexo em cujos vértices concorrem o mesmo número de arestas e cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo.

quadrangular sobre cada uma das faces de um cubo. O GeoGebra 3D permite que separemos dinamicamente as seis pirâmides do cubo, como ilustra a Figura 6, estabelecendo para o volume do hexaedro tetrakis a soma do volume do cubo com o volume das seis pirâmides. Já o cuboctaedro pode ser determinado pelo truncamento dos oito vértices de um cubo. O GeoGebra 3D possibilita que separemos dinamicamente os oito tetraedros do cubo, como mostra a Figura 7, determinando para o volume do cuboctaedro a diferença entre o volume do cubo e o volume dois oito tetraedros.

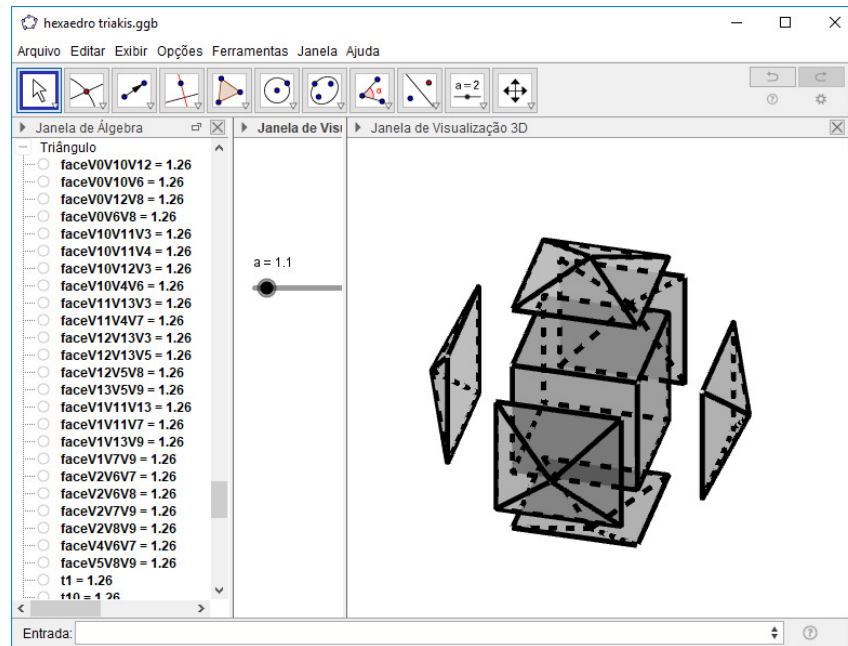


Figura 6: Decomposição do hexaedro tetrakis no GeoGebra 3D [6].

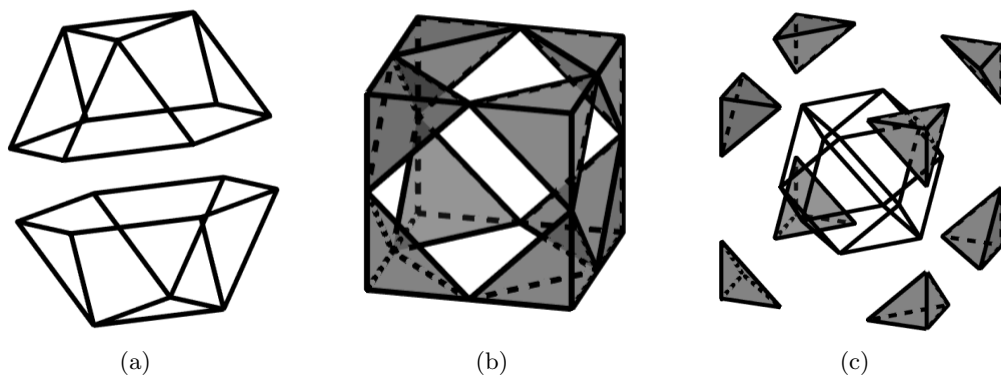


Figura 7: Cuboctaedro: (a) decomposição em duas cúpulas triangulares; (b) truncamento do cubo; (c) separação dos oito tetraedros.

Uma descrição detalhada de como empregar o GeoGebra 3D em atividades de composição/decomposição encontra-se em [6, 7]. Para executar o GeoGebra 3D, o estudante precisa de um computador com o software instalado ou com acesso à internet para utilizar o GeoGebra 3D online [2]. O download do software pode ser feito no site oficial do GeoGebra [3] e é gratuito.

4 Conclusões

Apresentamos neste trabalho estratégias para calcular o volume de poliedros convexos e utilizamos uma dessas estratégias para demonstrar a relação para o cálculo do volume do octaedro triakis, um poliedro de Catalan. Empregamos o software gratuito de geometria dinâmica GeoGebra 3D para compor/decompor poliedros convexos e, dessa forma, visualizar estratégias para o cálculo do volume. O aplicativo pode ser explorado em atividades para o cálculo do volume de poliedros convexos no Ensino Superior, como no Curso de Licenciatura em Matemática, e também no Ensino Médio. Neste, o GeoGebra 3D permite desenvolver atividades com os poliedros de Platão, como o octaedro regular, e também atividades de equicomposição com prismas e pirâmides.

Referências

- [1] H. S. M. Coxeter. *Regular polytopes*. Dover, New York, 1973.
- [2] GeoGebra. *GeoGebra 3D graphing calculator*, 2018. Disponível em: <https://www.geogebra.org/3d?lang=pt-BR>. Acesso em: 06 fev. 2019.
- [3] GeoGebra. *Download GeoGebra apps*, 2018. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download>. Acesso em: 06 fev. 2019.
- [4] R. L. Nós, O. H. Saito and M. A. dos Santos. Geometria, radicais duplos e a raiz quadrada de números complexos, *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 11:48–64, 2017. DOI: 10.21167/cqdvoll1201723169664rlnohsmas4864.
- [5] O. H. Saito, R. L. Nós and M. A. dos Santos. Radicais duplos e a raiz quadrada de um número complexo, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 5, n. 1, 2017. DOI: 10.5540/03.2017.005.01.0557.
- [6] V. M. R. da Silva and R. L. Nós. *Calculando o volume de poliedros convexos*. CRV, Curitiba, 2018. DOI: 10.24824/978854442681.4.
- [7] V. M. R. da Silva. *Calculando o volume de poliedros convexos*. Monografia de Conclusão de Curso. UTFPR, Câmpus Curitiba, 2018.
- [8] Wolfram Research. *Wolfram MathWorld: the web's most expensive mathematics resource*, 2018. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/>. Acesso em: 06 fev. 2019.