

## Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

# Investigando dinamicamente teoremas de geometria plana

Rudimar Luiz Nós<sup>1</sup>

UTFPR, Câmpus Curitiba

Rodrigo Cesar Lago<sup>2</sup>

Colégio Estadual Sebastião Saporski, Curitiba-PR

**Resumo.** Apresentamos neste trabalho investigações dos seguintes teoremas geométricos: quadrilátero inscrito; Simson-Wallace; ortocentro do triângulo inscrito; ângulo entre duas retas de Simson-Wallace; Steiner-Lehmus e Steiner-Lehmus completo. Empregamos nessas investigações o software gratuito de geometria dinâmica GeoGebra. Concluimos que as investigações são relevantes na Licenciatura em Matemática e no Mestrado Profissional em Matemática porque complementam/enriquecem as provas formais dos teoremas e também as referências bibliográficas de geometria empregadas nesses cursos.

**Palavras-chave.** Teorema do Quadrilátero Inscrito, Teorema de Simson-Wallace, Teorema de Steiner-Lehmus, Lugares Geométricos, Ortocentro do Triângulo Inscrito, GeoGebra.

## 1 Introdução

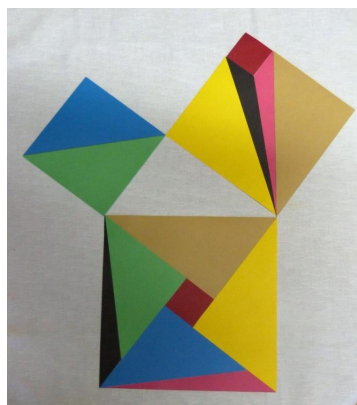


Figura 1: Prova manipulativa por equicomposição do teorema de Pitágoras [1].

da tese.

Geralmente, a prova formal de um teorema de geometria plana requer construções auxiliares, as quais são algumas vezes complexas [4, 6, 9]. O professor de matemática da Educação Básica pode substituir provas formais por demonstrações manipulativas [1, 10] e/ou provas sem palavras (*proofs without words*) [8], como ilustra a Figura 1. Mais, o professor pode complementar essas demonstrações com investigações empregando softwares de geometria dinâmica, doravante denominadas investigações dinâmicas, como por exemplo, o aplicativo gratuito GeoGebra [3]. Essas investigações são também importantes no Ensino Superior, como no Curso de Licenciatura em Matemática, e também na pós-graduação, como no Mestrado Profissional em Matemática, e as mesmas podem ocorrer tanto antes quanto depois da prova formal, evidenciando a importância de cada uma das hipóteses na construção

<sup>1</sup>rudimarnos@utfpr.edu.br.

<sup>2</sup>rodrigoclago@gmail.com

Dessa forma, apresentamos neste trabalho algumas investigações dinâmicas, efetuadas com o GeoGebra, de teoremas geométricos abordados em disciplinas de geometria plana, tanto na Licenciatura em Matemática quanto no Mestrado Profissional em Matemática. O roteiro completo dessas e de outras atividades está disponível em [6].

## 2 Teoremas geométricos

### 2.1 Quadrilátero inscrito

**Teorema 2.1.** *Um quadrilátero é inscrito em uma circunferência se, e somente se, possui um par de ângulos opostos suplementares.*

A Figura 2(a) ilustra a construção no GeoGebra de um quadrilátero onde um dos vértices não pertence à circunferência que passa pelos outros três vértices. O GeoGebra permite que se mova dinamicamente o vértice não pertencente à circunferência e que se verifique a soma dos ângulos opostos quando esse vértice pertence (ou não pertence) à circunferência - Figura 2(b).

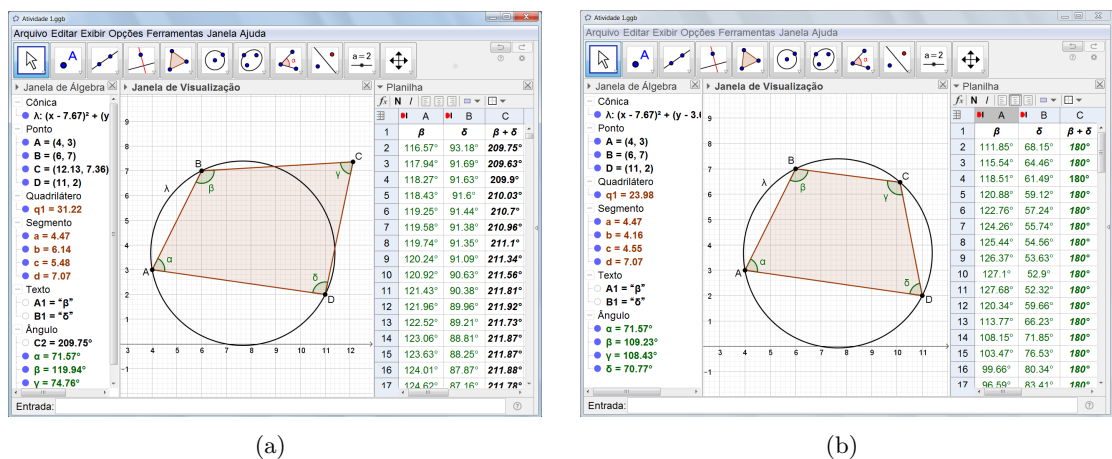


Figura 2: Verificação do Teorema 2.1 no GeoGebra: (a) construção do quadrilátero ; (b) soma dos ângulos opostos do quadrilátero - [6].

### 2.2 Simson-Wallace

**Teorema 2.2.** *Sejam um triângulo ABC e um ponto D não situado sobre as retas suportes de seus lados. Se o ponto D pertence à circunferência que circunscreve o triângulo ABC, então o triângulo pedal<sup>3</sup> de D em relação a ABC é degenerado.*

<sup>3</sup>Sejam ABC um triângulo qualquer, D um ponto não pertencente às retas suportes dos lados de ABC, e E, F e G os pés das perpendiculares baixadas de D sobre as retas suportes dos lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$ , respectivamente. O triângulo de vértices E, F e G é o triângulo pedal de D em relação a ABC - Figura 3(a). Se E, F e G são colineares, o triângulo pedal é degenerado e a reta que passa por esses três pontos é denominada *reta de Simson-Wallace* de polo D em relação ao triângulo ABC - Figura 3(b).

A Figura 3(a) mostra a construção do triângulo pedal de um ponto  $D$  em relação a um triângulo  $ABC$ . O GeoGebra permite que se mova dinamicamente o ponto  $D$  e se observe quando o triângulo pedal é degenerado - Figura 3(b). Além disso, movendo o ponto  $D$  sobre a circunferência que circunscreve o triângulo  $ABC$ , determinamos todas as retas de Simson<sup>4</sup>-Wallace<sup>5</sup> com polo em  $D$ , ou seja, o conjunto, ou envelope, das retas de Simson-Wallace, como ilustrado na Figura 4.

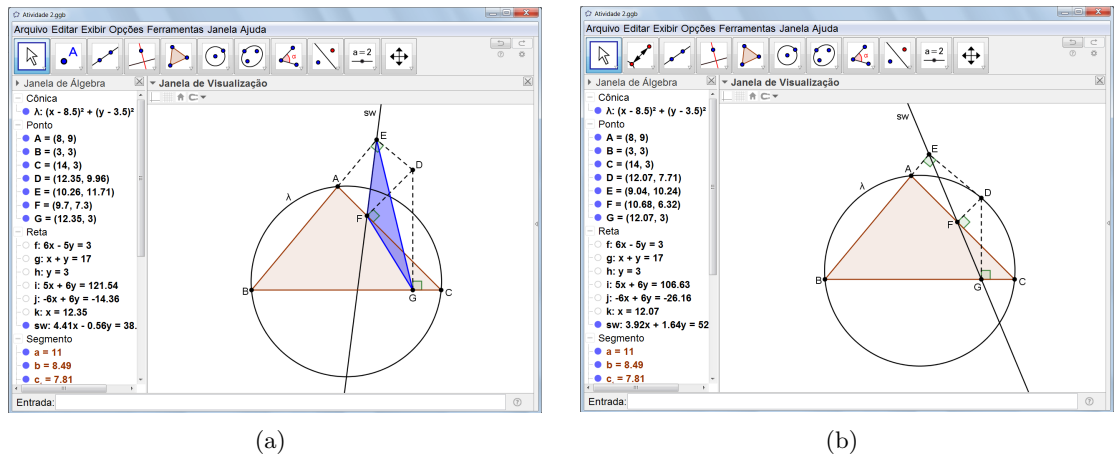


Figura 3: Verificação do Teorema 2.2 no GeoGebra: (a) construção do triângulo pedal; (b) reta de Simson-Wallace - [6].

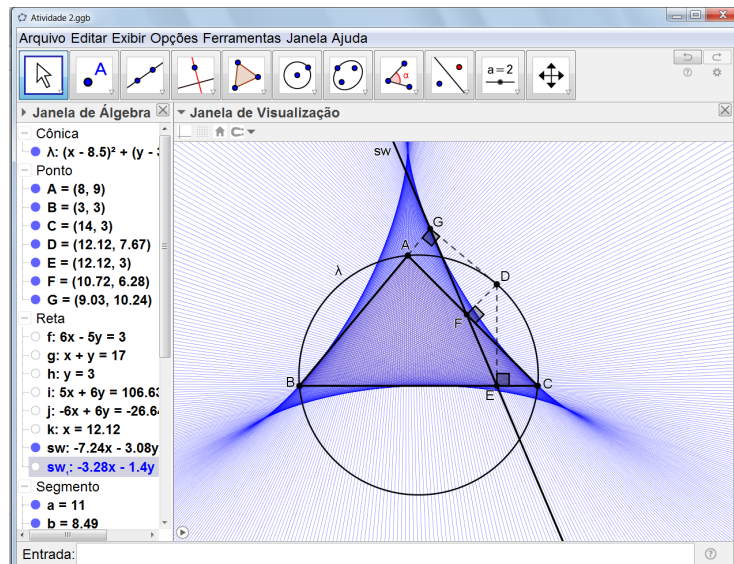


Figura 4: Envelope das retas de Simson-Wallace no GeoGebra [6].

<sup>4</sup>Robert Simson (1687-1768): matemático escocês, professor na Universidade de Glasgow.

<sup>5</sup>William Wallace (1768-1843): matemático escocês, professor na Universidade de Edimburgo.

### 2.3 Ortocentro do triângulo inscrito

**Teorema 2.3.** *Se  $H$  é o ortocentro de um triângulo  $ABC$  e  $D$  é um ponto da circunferência circunscrita a  $ABC$ , então o ponto médio do segmento  $\overline{DH}$  pertence à reta de Simson-Wallace do triângulo  $ABC$  com polo em  $D$ .*

A Figura 5 ilustra a validade do Teorema 2.3 no GeoGebra.

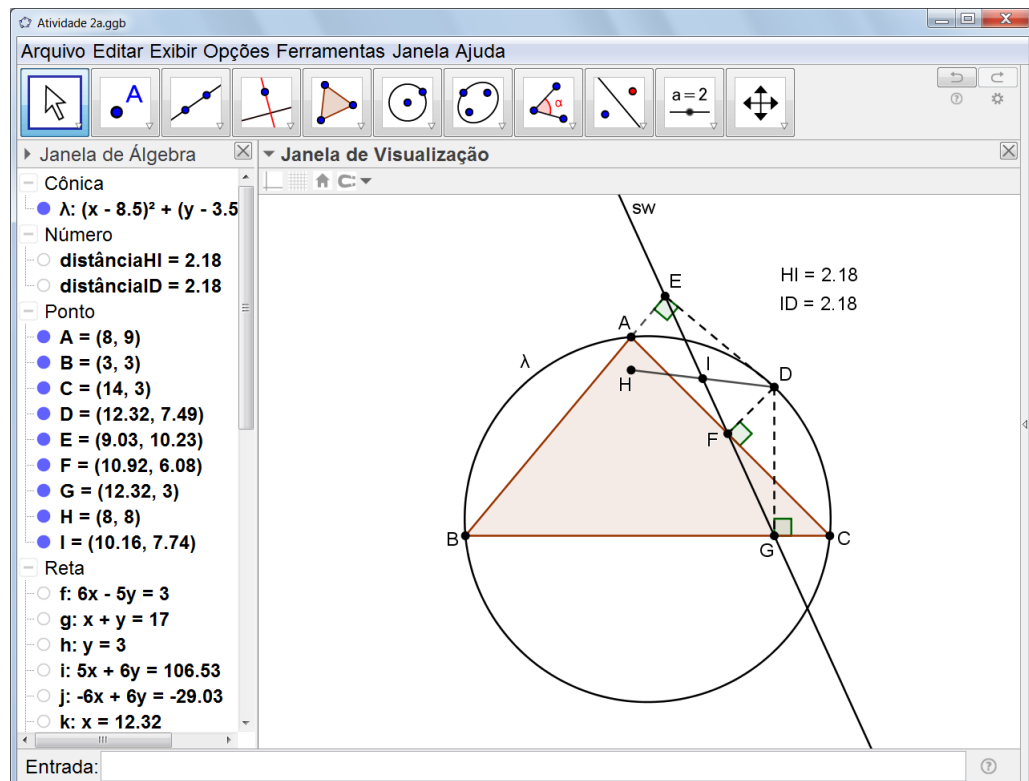


Figura 5: Verificação do Teorema 2.3 no GeoGebra [6].

### 2.4 Ângulo entre duas retas de Simson-Wallace

**Teorema 2.4.** *Se  $D$  e  $J$  são dois pontos pertencentes à circunferência circunscrita a um triângulo  $ABC$ , com  $A$  pertencente ao menor arco  $DJ$ , então o ângulo formado entre as retas de Simson-Wallace que possuem os pontos  $D$  e  $J$  como polos é congruente ao ângulo inscrito  $\widehat{DBJ}$  do menor arco  $DJ$ .*

A Figura 6(a) ilustra a construção de duas retas de Simson-Wallace. O GeoGebra possibilita que se observe a equivalência entre o ângulo de duas retas de Simson-Wallace e o ângulo inscrito no menor arco determinado pelos polos dessas retas - Figura 6(b).

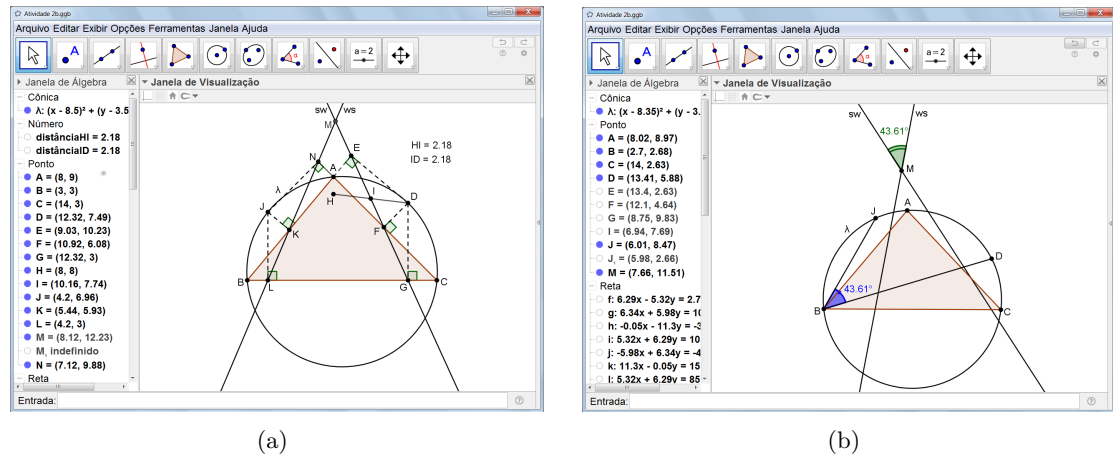


Figura 6: Verificação do Teorema 2.4 no GeoGebra: (a) construção de duas retas de Simson-Wallace; (b) ângulo entre duas retas de Simson-Wallace - [6].

## 2.5 Steiner-Lehmus

**Teorema 2.5.** *Se  $ABC$  é um triângulo qualquer, de base  $\overline{BC}$  e bissetrizes internas  $\overline{BE}$  e  $\overline{CD}$  tais que  $\overline{BE} \equiv \overline{CD}$ , então o triângulo  $ABC$  é isósceles.*

A Figura 7(a) ilustra a construção das bissetrizes de dois ângulos internos de um triângulo  $ABC$  qualquer. O GeoGebra possibilita que se verifique a medida das bissetrizes e dos lados e, dessa forma, se o triângulo construído é isósceles ou não - Figura 7(b).

Há várias estratégias para se provar formalmente o Teorema 2.5 [2, 6]. O GeoGebra pode ser empregado para investigar essas diferentes formas de demonstração.

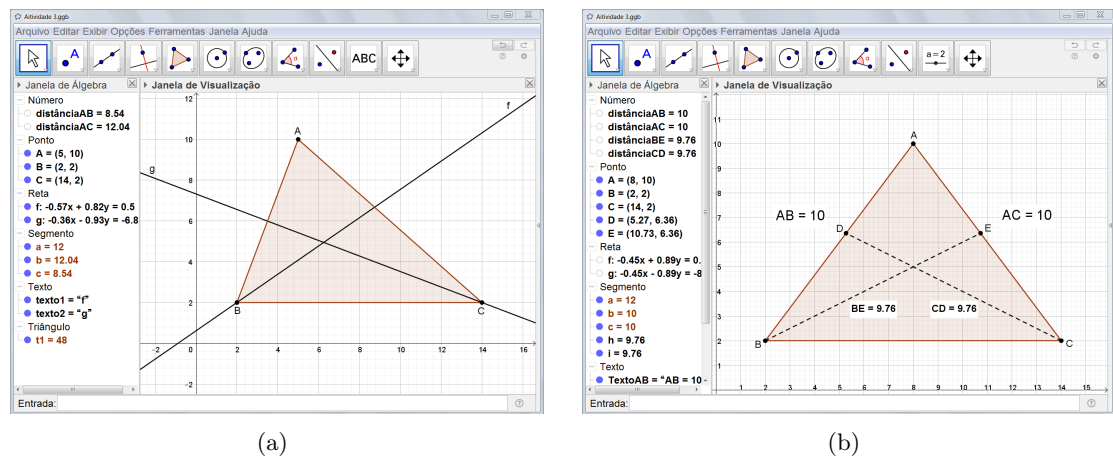


Figura 7: Verificação do Teorema 2.5 no GeoGebra: (a) construção das bissetrizes de um triângulo qualquer; (b) medida das bissetrizes e dos lados de um triângulo  $ABC$  - [6].

O GeoGebra também torna possível a investigação da forma completa do teorema de

Steiner<sup>6</sup>-Lehmus<sup>7</sup> [5].

**Teorema 2.6** (Steiner-Lehmus completo). *Se  $ABC$  é um triângulo qualquer, com ângulos internos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ , então:*

- i) as bissetrizes internas de  $\hat{B}$  e de  $\hat{C}$  são congruentes se, e somente se,  $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$ ;*
- ii) as bissetrizes externas de  $\hat{B}$  e de  $\hat{C}$  são congruentes se, e somente se,  $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$  ou*

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right);$$

- iii) a bissetriz externa de  $\hat{B}$  e a bissetriz interna de  $\hat{C}$  são congruentes se, e somente se,*

$$\operatorname{cos}^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\hat{B}}{2}\right) \operatorname{cos}\left(\frac{\hat{C}}{2}\right).$$

Dado um triângulo  $ABC$ , de vértices com coordenadas  $B(0,0)$ ,  $C(1,0)$  e  $A(x,y)$ , o lugar geométrico dos pontos  $A$  do plano tais que um par de bissetrizes de  $ABC$ , uma de  $\hat{B}$  e outra de  $\hat{C}$ , internas e/ou externas, são congruentes é dado pela união de uma curva com a mediatriz do segmento  $\overline{BC}$  ( $x = \frac{1}{2}$ ) [7]. A Figura 8, construída no GeoGebra, ilustra esse lugar geométrico, representativo do Teorema 2.6.

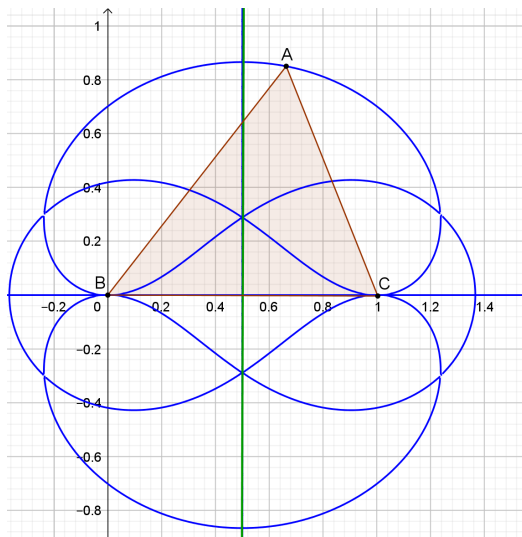


Figura 8: Lugar geométrico dos pontos  $A$  do plano tais que o triângulo  $ABC$ , com  $B(0,0)$  e  $C(1,0)$ , tem duas bissetrizes, uma de  $\hat{B}$  e outra de  $\hat{C}$ , congruentes.

<sup>6</sup>Jacob Steiner (1796-1863): matemático suíço, professor na Escola Técnica de Berlim.

<sup>7</sup>Daniel C. L. Lehmus (1780-1863): matemático alemão, professor na Universidade de Berlim.

### 3 Conclusões

Apresentamos neste trabalho investigações de teoremas de geometria plana efetuadas com o software de geometria dinâmica GeoGebra. A relevância do trabalho é evidenciada quando se compara as provas formais dos teoremas com as investigações [6], sendo que estas também enriquecem as referências empregadas nas disciplinas de geometria plana da Licenciatura em Matemática e do Mestrado Profissional em Matemática. Esperamos que o presente trabalho motive os professores de matemática da Educação Básica e do Ensino Superior a empregar/explorar aplicativos de geometria dinâmica em sala de aula.

### Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

### Referências

- [1] T. A. S. de Almeida. A demonstração no ensino de geometria. Monografia de Conclusão de Curso. UTFPR, Câmpus Curitiba, 2016.
- [2] S. R. Gardner. A variety of proofs of the Steiner-Lehmus theorem. Dissertação de Mestrado. East Tennessee State University, 2013.
- [3] GeoGebra. *Download GeoGebra apps*, 2018. Disponível em: <https://www.geogebra.org/download>. Acesso em: 08 fev. 2019.
- [4] S. L. Greitzer and H. S. M. Coxeter. *Geometry revisited*. The Mathematical Association of America, Washington, 1967.
- [5] M. Hajja. Other versions of the Steiner-Lehmus theorem. *The American Mathematical Monthly*, v. 108, p. 760-767, 2001.
- [6] R. C. Lago. Quadriláteros inscritíveis e os teoremas de Simson-Wallace e de Steiner-Lehmus. Dissertação de Mestrado. UTFPR, Câmpus Curitiba, 2018.
- [7] A. Montes and T. Recio. Generalizing the Steiner-Lehmus theorem using the Gröbner cover. *Mathematics and Computers in Simulation*, v. 104, p. 67-81, 2014. DOI: 10.1016/j.matcom.2013.06.006.
- [8] R. B. Nelsen. *Proofs without words: exercises in visual thinking*. The Mathematical Association of America, Washington, 1993.
- [9] A. C. M. Neto. *Geometria*. SBM, Rio de Janeiro, 2013.
- [10] R. L. Nós and F. M. Fernandes. Equicomposição de polígonos e o cálculo de áreas, *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics*, v. 6, n. 2, 2018. DOI: 10.5540/03.2018.006.02.0272.