Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, Vol. 2, N. 1, 2014.
Trabalho apresentado no CMAC-Sul, Curitiba-PR, 2014.

Uso de Integração Numérica em Problemas de Engenharia

Augusto Giacchini Kloth* **Olga Harumi Saito**
Departamento Acadêmico de Matemática, UTFPR
80230-901, Curitiba, PR
E-mail: agkkloth@hotmail.com, harumi@utfpr.edu.br.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo inicial do uso de integração numérica na resolução de problemas aplicados à engenharia. Dentre os métodos existentes, serão apresentados os métodos dos Trapézios e de Simpson na resolução de um problema aplicado. O problema em questão é o cálculo da resposta em um transdutor quando o transdutor sofre uma onda de choque proveniente de uma explosão, em determinado tempo. Ainda, será analisado o erro cometido na utilização destes métodos.

Palavras-chave: *integração numérica, método dos Trapézios, método de Simpson, onda de choque*

1 Integração

O cálculo utilizando-se de elementos infinitesimais, semelhante ao que se conhece hoje por Cálculo Diferencial e Integral, já era utilizado por matemáticos da Grécia Antiga, e desenvolveu-se ao longo do tempo, de forma a tornar-se o que existe hoje. O conceito de integral definida proposto por [1] pode ser dado através do limite expresso em (1), sendo f contínua no intervalo $[a, b]$, dividido em partições de tamanho $\Delta(x_i)$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta(x_i)\to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta(x_i) \right] = F(b) - F(a) \tag{1}$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, $F(x)$ é tal que $F'(x) = f(x)$. $F(x)$ é a primitiva ou antiderivada de $f(x)$.

2 Integração Numérica

A integração numérica é apresentada por [1] e [3] e consiste em aproximar a função a ser integrada por funções cuja integral seja conhecida. Este processo é notável desde o século XVIII como alternativa ao cálculo da primitiva. A integração numérica pode ser chamada de quadratura, pois é um método que mede a área sob uma curva ao traçá-la em papel milimetrado e contar os quadrados sob esta.

As Fórmulas de Newton-Cotes para integração numérica são identificadas por trabalharem com N pontos igualmente espaçados dentro do intervalo de integração. Dentre estas, os métodos dos Trapézios e de Simpson interpolam um polinômio de grau $N - 1$ pelos pontos dados, polinômio este que será efetivamente integrado.

Fazendo-se $N = 2$ na situação anteriormente expressa, tem-se o método dos Trapézios, que aproxima a função $f(x)$ por uma função linear, cujo gráfico é uma reta. O método de Simpson

*Bolsista de Iniciação Científica PICME/CNPq.

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0045

é obtido ao impor $N = 3$. Neste caso, a função $f(x)$ é aproximada por um polinômio $P(x)$ de grau 2. A Figura 1 ilustra estas duas situações.

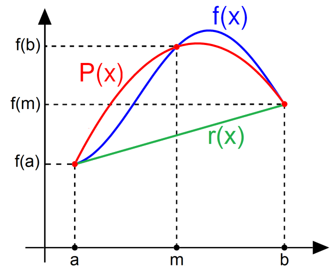

Figura 1: Função $f(x)$ aproximada pelo método 1-Trapézio ($r(x)$) e pelo método 1-Simpson ($P(x)$) - Fonte: adaptado de [4].

Utilizando-se da fórmula da Geometria Plana para cálculo da área do trapézio, pode-se aproximar a integral definida de $f(x)$ pelo método dos Trapézios, dando origem à equação (2).

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h(f(a)+f(b))}{2}, \quad h = b - a \tag{2}$$

Já para construir o polinômio de grau 2 do método de Simpson são necessários três pontos: $(a, f(a))$, $(m, f(m))$ e $(b, f(b))$, sendo m ponto médio de a e b. A integral aproximada pelo método de Simpson é dada pela equação (3). Para o método de Simpson, tem-se $h = m - a$.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(a) + 4f(m) + f(b)) \tag{3}$$

É possível, ainda, calcular o erro máximo cometido ao calcular uma integral definida pelos métodos dos Trapézios e de Simpson, dado respectivamente por (4).

$$E_{trap} = \frac{h^3}{12}M \qquad E_{simp} = \frac{h^5}{90}N \tag{4}$$

M é o máximo valor de $|f''(\zeta)|$ e N é o máximo valor de $|f^{(4)}(\zeta)|$, com $a \leq \zeta \leq b$.

Em ambos os métodos, o intervalo inicial $[a, b]$ pode ser dividido em subintervalos, de forma a aumentar a precisão do resultado. Para obter o valor aproximado da integral, basta somar os valores obtidos para cada subintervalo. Cada erro máximo local é obtido através de (4), desde que utilizado o h do subintervalo correspondente.

3 Aplicação e Resultados

Na área de Engenharia é comum deparar-se com integrais cujo melhor método de resolução é através de integração numérica. Por exemplo, [2] apresenta o problema de uma onda de choque proveniente de uma explosão, que tem sua resposta em um transdutor dada por: $F(t) = \frac{8}{\pi}e^{-t}I(a)$, para $t \geq a$. O valor $I(a)$ é dado por:

$$I(a) = \int_1^2 \frac{e^{ax}}{x}dx.$$

Calculou-se $I(1)$ através de programação da calculadora HP 50g, obtendo os valores da Tabela 1, que traz os resultados utilizando os dois métodos de integração e variando o número de partições do intervalo N_{par}. O valor E é o erro máximo local, calculado por meio de (4).

A Figura 2 mostra o gráfico de $F(t)$ com os valores de $I(1)$ obtidos na Tabela 1. Em verde é mostrado $F(t)$ quando $I(1)$ é obtido através do método dos Trapézios com $N_{par} = 1$. Já em violeta, é o resultado obtido quando utiliza-se o método de Simpson com $N_{par} = 1$. Utilizando os outros valores de $I(1)$ apresentados na tabela encontrou-se comportamento próximo ao de Simpson, destacado em violeta no gráfico.

Tabela 1: Apresentação dos resultados de $I(1)$ e erros associados

	Método dos Trapézios				**Método de Simpson**			
N_{par}	1	3	6	9	1	2	3	4
$I(1)$	3.20641	3.07612	3.06339	3.06102	3.06066	3.05924	3.05914	3.05913
E	0.22652	0.02517	0.00629	0.00280	0.00849	0.00053	0.00011	0.00003

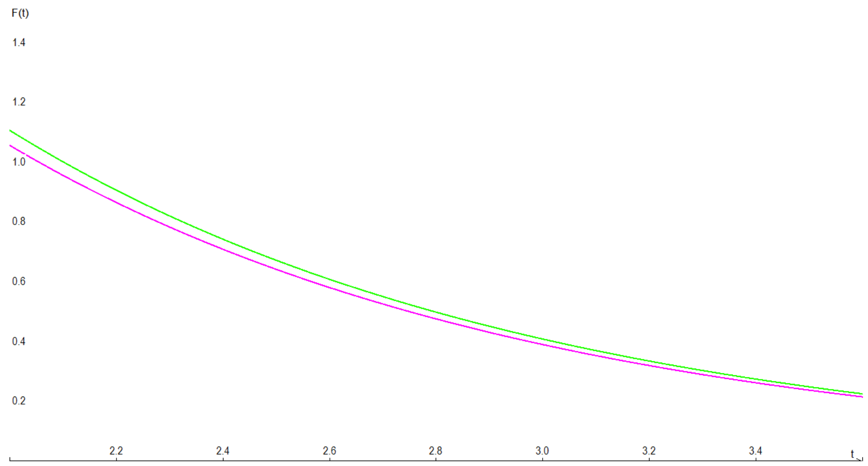

Figura 2: Gráfico de $F(t)$ para diferentes valores de $I(1)$ - Fonte: o autor, gerado pelo Winplot.

4 Conclusões

Em relação ao problema apresentado, utilizando o mesmo número de partições de intervalo, o método de Simpson mostrou maior precisão em relação ao método dos Trapézios. O gráfico da Figura 2 corrobora esta situação, evidenciando a diferença dos resultados obtidos pelos diferentes métodos. Analisando a Tabela 1, por sua vez, nota-se que a ordem do erro máximo cometido por 6-Trapézios é a mesma de 1-Simpson.

Assim, nota-se a importância que estas ferramentas desempenham em aplicações da área de Engenharia, como a exemplificada. Estudos com outros métodos de integração numérica podem ser realizados a determinadas situações-problema.

Referências

[1] GAELZER, Rudi. "Integração Numérica". Disponível on-line em: http://minerva.ufpel.edu.br/~rudi/grad/ModComp/MetNum/html/Apostilach3.html. Acesso em 24 set. 2013.

[2] MONTEIRO, Maria T. T. "Métodos Numéricos: exercícios resolvidos aplicados à Engenharia e outras Ciências". Disponível on-line em: http://repositorium.sdum.uminho.pt/bitstream/1822/14965/6/livro_mn.pdf. Acesso em 06 jul. 2013.

[3] RUGGIERO, Márcia A. Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha. "Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais". 2. ed. São Paulo: Makron, 1997.

[4] Wikimedia. Disponível on-line em: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/13 /Simpsons_method_illustration.png. Acesso em 01 jul. 2013.

DOI: 10.5540/03.2014.002.01.0045