Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Conexões entre Seções Cônicas e Órbitas Planetárias Através da 2^a e 3^a Leis de Kepler

Natã Henrique Silva[1]
Discente do Curso de Matemática - Licenciatura, UNIFAL-MG, Alfenas-MG
Anderson José de Oliveira[2]
Docente do Curso de Matemática - Licenciatura, UNIFAL-MG, Alfenas-MG

Descobertas na Grécia Antiga, ainda no período clássico por volta de 600 - 300 a.C. [1], as seções cônicas tem papel de destaque na área de Matemática Aplicada e em outras ciências, como na Astronomia. O estudo das órbitas dos planetas do Sistema Solar relacionam Matemática e Astronomia por meio das seções cônicas [2].

Johannes Kepler, formulou através de suas observações e estudos, três leis que descrevem o movimento planetário ao redor do Sol, são elas:

1. Lei das Órbitas: a órbita de cada planeta é uma elipse, com o Sol em um dos focos;

2. Lei das Áreas: a reta unindo o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais;

3. Lei Harmônica: o quadrado do período orbital dos planetas é diretamente proporcional ao cubo de sua distância média ao Sol, [2].

Este trabalho propõe o estudo das relações das seções cônicas implícitas no movimento planetário em torno do Sol, com ênfase nas demonstrações da segunda e terceira Leis de Kepler, utilizando elementos de Cálculo Diferencial e Integral, e as relações de uma elipse.

De acordo com [3], ao utilizarmos coordenadas polares para representar a órbita de um planeta tem-se; $x(t) = r(t)\cos\theta(t)$ e $y(t) = r(t)\sin\theta(t)$ e mais, como $r = r(\theta)$ é a equação da órbita na forma polar, segue que:

$$A'(t) = \frac{1}{2}r^2\theta', \tag{1}$$

integrando a equação (1), obtém-se:

$$A(t) = \frac{1}{2}kt + A(0), \tag{2}$$

que representa a velocidade areolar do planeta, que é a razão entre a área varrida e o intervalo de tempo gasto. Assim, considerando dois intervalos de tempos iguais, sejam $I_1 = (t_1, t_2)$ e $I_2 = (t_3, t_4)$ tais que $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$, ao substituir esses intervalos na

[1]natansilva41@outlook.com
[2]anderson.oliveira@unifal-mg.edu.br

equação (2), obtém-se:

$$\begin{aligned} A(t_2) - A(t_1) &= \frac{1}{2}k(t_2 - t_1) \\ &= \frac{1}{2}k(t_4 - t_3) \\ &= A(t_4) - A(t_3), \end{aligned}$$

tem-se que o raio vetor que liga o Sol ao planeta descreve áreas iguais em tempos iguais, provando a segunda lei de Kepler.

Para demonstrar a terceira Lei de Kepler, utiliza-se em [2], um resultado denominado, derivação da constante "K", obtendo como resultado, $k = \dfrac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$. De acordo com [2], duas relações das elipses são dadas por: $A = \pi.a.b$, com A sendo a área da elipse, a o semieixo maior e b o semieixo menor, com $b = \sqrt{a(1 - e^2)}$.

Da Lei das Áreas provada anteriormente, tem-se que, $dA = \dfrac{h}{2}dt$. Ao integrarmos sobre um período P, obtém-se que:

$$\pi ab = \frac{h}{2}P. \tag{3}$$

Ao substituirmos b na equação (3) e usando a definição de *semi-lactus rectum*, que é a semi-corda focal da elipse, passando por um dos focos, sendo perpendicular ao eixo maior chegamos em:

$$b = \sqrt{a(1 - e^2)} = \sqrt{pa} = \sqrt{\frac{ah^2}{\mu}}.$$

Elevando a equação (3) ao quadrado obtém-se:

$$P^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{G(m_1 + m_2)},$$

que é a 3^a Lei de Kepler, na forma generalizada por Newton.

Agradecimentos

Agradecemos à Fapemig e à Unifal-MG pelo apoio financeiro.

Referências

[1] VIDAL, F. A.; SANTOS, G. O.. A evolução Histórica das Sessões Cônicas. In: XI Seminário Nacionalidade História da Matemática, 2015, Natal PÔSTER, 2015.

[2] O. K. Souza, M. F. Oliveira. *Astronomia e Astrofísica*. 2a. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.

[3] FERREIRA, João Socorro Pinheiro; ALMEIDA, George C.; GONDIM, Michael KV. Leis de Kepler e Gravitação Universal.