Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Aplicação do Lema de Farkas na Obtenção de Condições Necessárias de Otimalidade para Problemas de Otimização Não Linear

Beatriz Akiria de Assis Quaresma[1]
Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal, UFU, Ituiutaba, MG
Moisés Rodrigues Cirilo do Monte [2]
Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal, UFU, Ituiutaba, MG

## 1 Introdução

A otimização é uma área da Matemática que desempenha um papel de grande importância no nosso cotidiano, sendo usada na resolução de vários tipos de problemas. Em particular, usa-se otimização para encontrar os valores extremos de uma função $f(x)$ com $x$ pertencente a um certo conjunto de restrições. Contudo, encontrar esses valores nem sempre é um tarefa facilmente executável. Neste trabalho, queremos utilizar o Lema de Farkas [1] para escrever condições necessárias de otimalidade Karush-Kuhn-Tucker (K.K.T.) para o problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \Omega, \end{array} \tag{1}$$

onde $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) = 0,\ i \in I,\ g_j(x) \leq 0,\ j \in J\}$ é o conjunto factível do problema (1) e as funções $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $j \in J = \{1, \dots, p\}$, e $h_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $i \in I = \{1, \dots, m\}$, são continuamente diferenciáveis. Obter condições de otimalidade para o problema (1) é de fundamental importância para a continuidade deste trabalho, onde deseja-se resolver problemas específicos em diversas áreas da Ciência, aplicando os resultados teóricos estudados. Para obter as condições de otimalidade Karush-Kuhn-Tucker, fizemos uso da condição de qualificação de Abadie. Existem muitas outras condições de qualificação na literatura e uma pesquisa sobre tais condições, e como se relacionam entre si, é outro tópico de interesse para pesquisas futuras.

## 2 Condições Necessárias de Otimalidade

Dados $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$, seja $B(\bar{x}, \epsilon)$ a bola aberta com centro em $\bar{x}$ e raio $\epsilon$. Defina o conjunto de índices de restrições ativas em $\bar{x}$ por $A(\bar{x}) = \{j \in J \mid g_j(\bar{x}) = 0\}$.

[1] beatrizfjdp@hotmail.com
[2] moises.monte@ufu.br


© 2020 SBMAC

**Definição 2.1.** *Dizemos que* $\bar{x} \in \Omega$ *é uma minimizador local para (1) quando existe um* $\epsilon > 0$ *tal que* $f(\bar{x}) \leq f(x)$ *para todo* $x \in B(\bar{x}, \epsilon) \cap \Omega$.

**Definição 2.2.** *Dado* $\bar{x} \in \Omega$, *seja* $T(\bar{x})$ *o cone de direções tangentes a* $\Omega$ *em* $\bar{x}$ *como definido em [1] e considere os seguintes cones*

$$\begin{aligned} DFL(\bar{x}) &= \{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla h_i(\bar{x})^T d = 0,\ i \in I,\ \nabla g_j(\bar{x})^T d \leq 0,\ j \in A(\bar{x})\}, \\ D(\bar{x}) &= \{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(\bar{x})^T d < 0\}. \end{aligned}$$

Sabemos que $T(\bar{x}) \subset DFL(\bar{x})$. Também, se $\bar{x}$ for um minimizador local para (1), então $T(\bar{x}) \cap D(\bar{x}) = \emptyset$ (ver [2]). Tal condição é conhecida na literatura como condição de qualificação de Abadie. O próximo resultado se refere ao Lema de Farkas e sua demonstração pode ser encontrada em [1].

**Lema 2.1** (Farkas)**.** *Seja* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *e* $c \in \mathbb{R}^n$. *Então exatamente um dos seguintes sistemas possui solução:*

$$(I) \quad Ax \leq 0, \quad c^T x > 0, \qquad ou \qquad (II) \quad A^T y = c, \quad y \geq 0.$$

**Teorema 1.** *Seja* $\overline{x} \in \Omega$ *minimizador local do problema (1) e suponha que* $T(\overline{x}) = DFL(\overline{x})$. *Então existem números reais* $\lambda_i,\ i \in I,\ \mu_j,\ j \in J$, *tais que* $\mu_j \geq 0,\ j \in J,\ \mu_j g_j(\bar{x}) = 0,\ j \in J$, *e*

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0.$$

*Demonstração.* Seja d $\in T(\overline{x})$. Como $\bar{x}$ é minimizador local, segue que $T(\bar{x}) \cap D(\bar{x}) = \emptyset$, mas como $T(\overline{x}) = DFL(\overline{x})$, temos que $DFL(\overline{x}) \cap D(\bar{x}) = \emptyset$, ou seja, o sistema

$$\begin{cases} -\nabla f(\bar{x})^T d > 0 \\ \nabla h_i(\bar{x})^T d \leq 0, \quad i \in I \\ -\nabla h_i(\bar{x})^T d \leq 0, \quad i \in I, \\ \bigtriangledown g_j(\bar{x})^T d \leq 0, \quad j \in A(\bar{x}) \end{cases}$$

não admite solução. Pelo Lema 2.1, segue que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j \in A(\bar{x})} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0,$$

onde $\lambda_i \in \mathbb{R},\ i \in I,\ \mu_j \geq 0, j \in A(\overline{x})$. Fazendo $\mu_j = 0$ para $j \in J \setminus A(\bar{x})$, concluímos a demonstração. □

## Referências

[1] A. A. Ribeiro e E. W. Karas. *Otimização Contínua - Aspectos Teóricos e Computacionais.* Cengage Learning, São Paulo, 2013.

[2] W. Sun and Y. Yuan. *Optimization theory and methods: nonlinear programming Vol. 1.* Springer Science & Business Media, New York, 2006.



© 2020 SBMAC