Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo de eficiência algorítmica para conectividade de Grafos via Teoria Espectral de Grafos (TEG)

Matheus Vyctor Aranda Espíndola[1]
Faculdade de Computação, UFMS, Campo Grande, MS
Bruno Dias Amaro[2]
Instituto de Matemática, UFMS, Campo Grande, MS

1 Introdução

Seja $G = G(V,E)$ um grafo simples com n vértices. Denotemos por $A = A(G)$ a matriz de adjacência de G, $D = D(G)$ a matriz diagonal dos graus dos vértices de G e $L = L(G) = D - A$ a matriz laplaciana de G. O presente trabalho estuda e compara a eficiência computacional de algoritmos que analisam a conectividade de grafos a partir das matrizes A e L.

2 Resultados utilizados

Teorema 2.1. *([2]). Seja G um grafo com n vértices e a matriz A associada. G é conexo se, e somente se, a matriz* $A + A^2 + ... + A^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A^k$ *não possui entrada nula.*

Teorema 2.2. *([1] [2] [3]). Sejam G um grafo com n vértice e $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq ... \geq \lambda_n$ os autovalores da matriz L associada. G é conexo se, e somente se, $\lambda_{n-1} > 0$.*

Corolário 2.1. *([2]). A quantidade de componentes conexas de um grafo G é dada pela multiplicidade de autovalores iguais a 0 da matriz laplaciana L associada a ele.*

Teorema 2.3. *([4] [5] [6]). Seja $c(\lambda) = \det(\lambda \cdot I - M) = \lambda^n + c_1 \cdot \lambda^{n-1} + c_2 \cdot \lambda^{n-2} + ... + c_n$ o polinômio característico de uma matriz M. Os coeficientes c_k podem ser encontrados por:*

$$c_k = -\frac{Tr(M_k)}{k},\ 1 \leq k \leq n \quad \text{com} \quad M_k = M \cdot (M_{k-1} + c_{k-1} \cdot I),\ 2 \leq k \leq n,$$

onde $c_0 = 1$, $M_1 = M$ e I é a matriz identidade.

Teorema 2.4. *A multiplicidade de raízes nulas de um polinômio $p(x) = x^n + c_1 x^{n-1} + ... + c_k x^{n-k} + ... + c_n$ é igual a $n - k$ se, e somente se, $c_i = 0$, $\forall\ n - k < i \leq n$.*

[1]matheusvyc@gmail.com
[2]bruno.amaro@ufms.br

3 Implementação computacional

Foi feita uma análise algorítmica para o problema de conectividade de grafos utilizando as matrizes A e L associadas, através dos Teoremas e Corolário apresentados na Seção anterior. Tal análise levou em consideração o tempo de execução, gasto de memória e respostas obtidas. Os algoritmos foram implementados por meio de Linguagem C.

O primeiro algoritmo foi implementado aplicando o Teorema 2.1, isto é, o algoritmo busca uma entrada nula na matriz $\sum_{k=1}^{n} A^k$. Se, e somente se, havê-la, o grafo G é desconexo. O segundo algoritmo encontra o L-polinômio de L através do algoritmo de *Faddeev-Leverrier* (Teorema 2.3), apura a quantidade de autovalores nulos (Teorema 2.4) e decide se G é ou não conexo (Teorema 2.2). Em caso afirmativo, o algoritmo computa ainda o número de componentes conexas (Corolário 2.1). Os algoritmos são de ordem $\mathcal{O}(n^4 \log_2 n)$ e $\mathcal{O}(n^4)$, respectivamente [4] [6] [5]. Cada algoritmo foi executado 30 vezes a partir de matrizes de adjacência (e, consequentemente, as laplacianas) de ordem n geradas randomicamente e fez-se a média aritmética do tempo de cada uma das 30 execuções. As tabelas a seguir mostram a relação ordem X tempo de execução de cada algoritmo.

Tabela 1: Relação de ordem X tempo das matrizes A (esquerda) e L (direita)

Ordem(n)	Tempo(ti_n)(ms)
10	0.32
25	14.01
50	262.55
75	1554.71
100	5126.99
150	28244.73
200	103426.97
250	331184.60
300	656788.28

Ordem(n)	Tempo(ti_n)(ms)
10	0.00
25	0.00
50	18.77
75	101.10
100	317.47
150	1707.57
200	6027.93
250	15103.63
300	32102.00

Referências

[1] B. D. Amaro, A soma dos maiores autovalores da matriz laplaciana sem sinal em famílias de grafos, Tese de Doutorado em Matemática Aplicada, Unicamp, 2014.

[2] N. M. de Abreu, R. Raposo and C. T. M. Vinagre. *Teoria Espectral de Grafos - Uma Introdução.* III^o Colóquio de Matemática da Região Sul, 2014.

[3] S. Even. *Graph algorithms.* Cambridge University Press, 2012.

[4] C. Pernet and A. Storjohann. *Faster algorithms for the characteristic polynomial.* Symbolic Computation Group, 2007.

[5] R. Rehman and I. C. F. Ipsen. *La budde's method for computing characteristic polynomials.* arXiv:1104.3769v1, 2011.

[6] B. Yu. and T. Kitamoto. The CHACM method for computing the characteristic polynomial of a polynomial matrix. *Ieice Trans. Fundamentals, Vol E83-A, n^o 7*, 2000.