Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Solução Analítica de Problema Bidimensional de Condução de Calor via Funções de Green

Eduardo Peixoto de Oliveira [1]
Guilherme Ramalho Costa [2]
José Aguiar dos Santos Júnior [3]
José Ricardo Ferreira Oliveira [4]
Gilmar Guimarães [5]
Universidade Federal de Uberlândia

1 Introdução

Funções de Green (FG) são ferramentas matemáticas empregadas na obtenção do campo de temperatura em problemas lineares, transientes ou permanentes, de condução de calor ou fenômenos descritos pelo mesmo tipo de equações [1]. O objetivo deste trabalho é determinar a solução analítica de um problema de condução de calor bidimensional transiente com fluxo de calor parcial, além de realizar a verificação intrínseca da solução obtida. Conforme [3], o significado físico da Função de Green $G(r, t|r', \tau)$ em problemas transientes é a representação da temperatura no local r, no tempo t, devido a uma fonte pontual instantânea unitária, localizada no ponto r', liberando energia no instante τ. De maneira similar, as FG são entendidas como sendo a distribuição de temperatura causada por um pulso de energia local e instantâneo [1]. Em [2] é ressalta a importância do uso das FG em problemas onde as condições de contorno variam com o tempo, caso no qual a solução através do método de separação de variáveis é descartada de imediato.

2 Problema bidimensional proposto, resultados e discussões

Na Fig. 1(a) é apresentada uma placa plana sujeita condições de fluxo (condição do tipo 2) na direção x e de fluxo e temperatura (condição do tipo 1) prescritos na direção y, seguindo o sistema de numeração proposto por [1]. A Função de Green associada a este

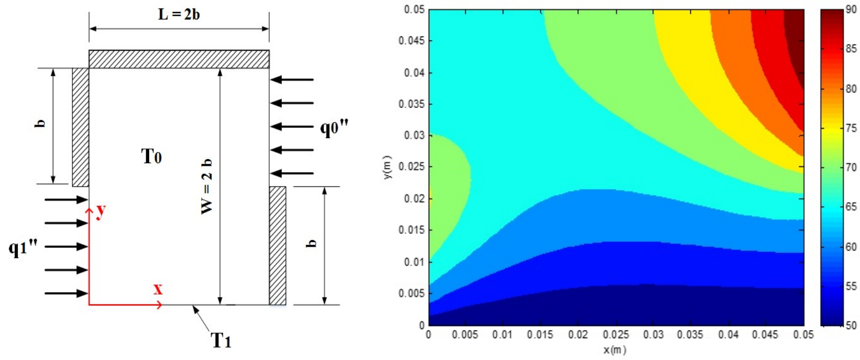
[1]eduardopeixoto@ufu.br
[2]guilherme_r.c@hotmail.com
[3]aguiarsjunior@gmail.com
[4]jose.ricardo@ufu.br
[5]gguima@mecanica.ufu.br

© 2020 SBMAC

problema é:

$$G = \left[\frac{2}{WL} + \frac{4}{WL} \sum_{m=1}^{\infty} e^{\bar{A}} \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) \right] \sum_{n=1}^{\infty} e^{\bar{B}} \text{sen}\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) \text{sen}\left(\frac{\beta_n y'}{W}\right) \quad (1)$$

sendo $\alpha_m = m\pi$, $\beta_n = (2n-1)\pi/2$, $\bar{A} = -[\alpha_m^2 \alpha(t-\tau)]/L^2$ e $\bar{B} = -[\beta_n^2 \alpha(t-\tau)]/W^2$.



(a) Problema X22Y21 proposto (b) T(x,y,100)

Figura 1: Campo de temperatura em uma placa plana.

Considerando as condições de contorno apresentadas na Fig. 1(a) aplicadas à equação da difusão do calor bidimensional sem termos fonte resolvendo as integrais da equação-solução integral segundo [1]:

$$T(x,y,t) = \int_{S'} G T_0 dy' dx' + \frac{\alpha}{k} \int_0^t \int_{y'} \sum_{i=1}^{2} q_i'' G|_{x_i'} dy' d\tau - \alpha T_1 \int_0^t \int_{x'} \left. \frac{\partial G}{\partial y} \right|_{y'=0} dx' d\tau \quad (2)$$

A solução analítica do problema X22Y12 apresentado foi implementada no software MatLab®. Para tal, adotou-se L = W = 0,05 m, $q_1'' = q_0'' = 10^5$W/m^2, $T_0 = 28^{\text{O}}$C, $T_1 = 50^{\text{O}}$C, k = 73 W/mK, $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}$m^2/s. Na Figura 1(b) apresenta-se o campo de temperatura após 100 s. Fazendo-se a verificação intrínseca considerando o problema dimensional observou-se que o desvio entre as temperaturas do problema X22Y12 e X22 (para diferentes condições de fluxos e temperaturas inicial e prescrita), ocorre apenas desvios para tempos pequenos com um erro, entre as duas situações de 0,016 e $2,735 \cdot 10^{-11}$ nas direções x e y respectivamente.

Referências

[1] K. D. Cole, J. V. Beck, A. Haji-Sheikh and B. Litkouhi. *Heat Conduction Using Green's Functions*, 2nd ed. CRC Press, Boca Raton, FL, 2011.

[2] A. P. Fernandes. Funções de Green: Soluções Analíticas Aplicadas e Problemas Inversos em Condução de Calor, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2009.

[3] M. N. Özisik. *Heat Conduction*, 2nd ed. John Wiley & Sons, Nova York, 1993.

© 2020 SBMAC