Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Vínculos topológicos entre poliedros e dimensão

Natália Rodrigues [1]
Socorro Rangel [2]
UNESP - Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto-SP

A abordagem poliédrica para a resolução de problemas de programação linear inteira (PLI) envolve a noção de *inequação válida* para um poliedro P como em (1), isto é, inequações satisfeitas por todos os pontos de P.

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m \tag{1}$$

Se $X = P \cap \mathbb{Z}^n$ é o conjunto de pontos factíveis (viáveis) de um PLI, estamos interessados no poliedro correspondente ao *envoltório convexo* de X, isto é, o menor conjunto convexo que contém X (notação: $\text{conv}(X)$). Se a descrição de $\text{conv}(X)$ é conhecida, podemos considerar o problema de programação linear contínua (PLC) com mesma função objetivo do PLI e cuja região factível é $\text{conv}(X)$. Neste caso, um vértice ótimo do PLC também é uma solução ótima do PLI. Assim, é importante identificar se uma inequação válida para um poliedro é necessária, ou não, em sua descrição. Neste contexto, é vantajoso conhecer a dimensão do poliedro: se um poliedro $P \subset \mathbb{R}^n$ tem dimensão completa (i.e. a dimensão de P é igual a n), há uma condição necessária e suficiente para que uma inequação válida seja necessária na descrição de P. Nemhauser e Wolsey [1] demonstram resultados importantes relacionados à dimensão de poliedros a partir do conceito de *ponto interno*.

Suponha que P seja definido pelas inequações (2).

$$a^i x \leq b_i \quad i = 1, \ldots, m \quad (a^i \in \mathbb{R}^n) \tag{2}$$

Seja $M^{\leq} = \{i \in \{1, \ldots, m\} : a^i x < b_i \text{ para algum } x \in P\}$. Um ponto $x \in P$ é chamado de *ponto interno* de P se $a^i x < b_i$ para todo $i \in M^{\leq}$. Um ponto $x \in P$ é chamado de *ponto interior* de P se satisfaz todas as inequações (2) de maneira estrita. Na Figura 1.a, o ponto a é ponto interno e interior de P. O ponto b não é nem interno, nem interior.

Como se pode inferir, os pontos interiores de um poliedro são os mesmos como definidos na teoria de espaços métricos. Um fato menos trivial é que os pontos internos de P também possuem um aspecto topológico: eles são equivalentes aos *pontos interiores relativos* de P: pontos interiores de P quando visto como um subconjunto de um subespaço métrico particular de $\mathbb{R}^n$ (Figura 1.b).

---

[1] nataliaswrodrigues@gmail.com
[2] socorro.rangel@unesp.br

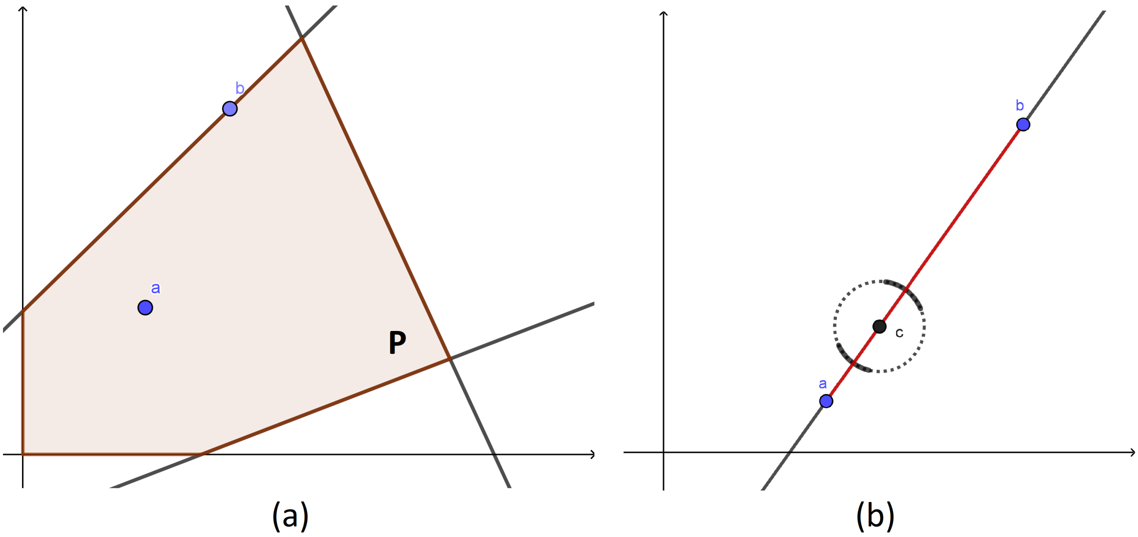

Figura 1: (a) O ponto a é ponto interno e interior de P. O ponto b não é nem interno, nem interior. (b) Seja r a reta que contém o segmento S com extremidades em a e b (note: r é subespaço métrico do $\mathbb{R}^2$). O ponto c não é ponto interior de S, mas existe uma bola centrada em c cuja interseção com a reta r está inteiramente contida em S. Assim, c é um ponto interior relativo de S.

O conceito de interior relativo aparece como uma alternativa para estudar a topologia dos conjuntos convexos no $\mathbb{R}^n$ que têm dimensão menor que n, e pode ser visto como uma generalização da ideia usual de interior no espaço métrico $\mathbb{R}^n$. Neste trabalho, definimos formalmente os conceitos de ponto interno de um poliedro e de interior relativo de um conjunto convexo e introduzimos as ideias por trás da prova de que, para poliedros, estes conceitos são equivalentes.

Agradecimentos

Agradecemos ao Ibilce/Unesp pelo suporte e à FAPESP (Processos 2017/26969-9, 2016/01860-1 e 2013/07375-0) pelo apoio financeiro.

Referências

[1] G. Nemhauser, L. Wolsey. *Integer and Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons, New York, 1988.

[2] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.

[3] N. Rodrigues. *Um estudo do problema da mochila com restrições especiais*, Relatório de pesquisa de Iniciação Científica II. Departamento de Matemática Aplicada, Unesp-São José do Rio Preto, 2019.