Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Os Números de Pell e a razão de Prata [1]

Márcia Teixeira [2]
Universidadde Federal da Grande Dourados - Profmat - UFGD
Irene Magalhães Craveiro [3]
Universidade Federal da Grandde Dourados - Faculdade de Ciências e Tecnologias - Unidade II

1 Introdução

Alguns números metálicos estão na natureza, como por exemplo o número de ouro e são utilizados como base nas construções, desde a antiguidade até os dias de hoje. O mais famoso dos números metálicos é, sem dúvida, o número de ouro, porém com igual importância, mas não tão conhecido, o número de prata já era estudado pelos gregos e surgem em várias aplicações na Matemática. O casal norte americano Donald e Carol Whatts , estudou cuidadosamente as ruinas das Casas de Jardim de Óstia, na cidade Porto do Império Romano e descobriram que essas casas eram organizadas por um sistema proporcional ao número de prata, conforme podemos constatar em [4]. Neste trabalho iremos explorar os conceitos, de números de Pell e a razão de prata e resultados que envolvem esses dois conceitos bem como a relação entre essas duas definições.

2 Os Números de Pell e a Razão Prata

O número de Prata é uma constante matemática sendo que sua terminologia tem como ponto de referência o número ouro. Em [3] são dadas diversas propriedades do número de prata. A solução positiva da equação $x^2 - 2x - 1 = 0$ é igual a $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ e essa constante é chamada de número de prata ou razão de prata. Em [1] e [2],veremos que os números de Pell são números inteiros não negativos definidos recursivamente como segue:

$$\begin{cases} P_0 = & 0 \\ P_1 = & 1 \\ P_n = & 2P_{n-1} + P_{n-2}, \text{ para } n > 1 \end{cases}$$

Os resultados que iremos enunciar a seguir estabelecem relações entre os números de Pell e a razão de prata.

Proposição 2.1 Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $P_n = \frac{\sqrt{2}}{4}[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n]$.

[1] apoio financeiro da CAPES

[2] teixe_ira@hotmail.com

[3] irenecraveiro@ufgd.edu.br

Proposição 2.2 Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ temos: $\alpha^n = \alpha P_n + P_{n-1}$, onde P_n é o $n-$ésimo número de Pell.
Proposição 2.3 Seja $n \in \mathbb{N}$. Então:

1. $\alpha^n = 2\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}$, $n \geq 2$;
2. $\alpha^{-n} = 2\alpha^{-n-1} + \alpha^{-n-2}$, $n \geq 2$;
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^n = 2\alpha$
4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\alpha}\right)^n = \alpha^2$

Proposição 2.4 Seja $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência de Pell. Então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1}}{P_n} = 1 + \sqrt{2} = \alpha$.

Além desses resultados que apresentaremos nesse trabalho, descreveremos o ponto de vista geométrico da razão de prata, ou seja, dados dois segmentos de medidas $2a$ e b, a constante α satisfaz: $\alpha = \frac{2a+b}{a} = \frac{a}{b}$. Também delinearemos a construção geométrica de um triângulo retângulo isósceles de forma que o mesmo estabelece uma relação com a razão de prata. Outra construção a ser apresentada é o retângulo de prata ou prateado, veremos sua construção que está relacionado com a folha de A4, que é obtida utilizando o conceito da proporção de prata.

Referências

[1] A. Benjamin, J. J. Quinn. Proofs that really count: the art of combinatorial proof. MMA, 2003.

[2] A. Benjamin, S. S. Plott, J. A. Sellers. Tiling proofs of recent sum identities involving Pell numbers. Springer, 2008.

[3] A.Primo, E. Reyes.Some algebraic and geometric properties of the silver number,Quarterly 18,2007.

[4] V. W. Spinadel.La familia de números metálicos y el diseño,1995