Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Sobre unicidade de soluções suaves das equações de Navier-Stokes tempo-fracionárias em $L^N\left(\mathbb{R}^N\right)^N$

J. Vanterler da C. Sousa [1]
E. Capelas de Oliveira [2]
[1,2] Departamento de Matemática Aplicada, Imecc-Unicamp, Campinas, SP, 13083-859, Brasil

Resumo. Investigamos a unicidade de soluções suaves para equações de Navier-Stokes tempo-fracionária na classe $C\left([0,\infty); L^N\left(\mathbb{R}^N\right)^N\right)$ por meio das estimativas $L^p - L^q$ de Giga-Shor e da desigualdade de Gronwall.

Palavras-chave. Unicidade, equações de Navier-Stokes tempo-fracionária, regularidade máxima, desigualdade de Gronwall.

1 Introdução

Investigar as equações de Navier-Stokes ao longo dos anos sempre foi alvo de motivação para inúmeros pesquisadores do campo de Equações Diferenciais Parciais, área da Matemática, devido sua importância e de grande relevância. As equações de Navier-Stokes formam um sistema de equações diferenciais não lineares que apresenta problemas complexos [5]. Investigar existência, unicidade, regularidade de soluções de equações de Navier-Stokes, necessita de ferramentas matemáticas refinadas, que por sua vez exige grande esforço e dedicação [1, 2, 5]. Um exemplo clássico deste fato é que a existência de solução suave global para as equações no caso tridimensional, para fuidos incompressíveis, é um problema em aberto. Por outro lado, as equações de Navier-Stokes são fundamentais em modelar comportamento de fluidos, sejam eles envolvendo correntes marítimas, fluxo sanguíneo, massas de ar, dentre outras. Então, nota-se que a importância dessas equações se estende por diversas áreas.

Por outro lado, o cálculo fracionário é de fato uma área da matemática que tem se solidificado ao longo de décadas, devido sua importância e relevância, por sua base teórica bem fundamentada e construída, bem como, as inúmeras aplicações por meio de derivadas e integrais fracionárias [6, 7]. Nesse sentido, pesquisadores passaram a investigar existência, unicidade e regularidade de soluções suaves de equações de Navier-Stokes fracionárias, uma vez que os resultados obtidos são de grande destaque [3, 4]. O projeto de unificar cálculo fracionário e equações de Navier-Stokes, de fato é algo que está em crescimento,

[1] vanterler@ime.unicamp.br
[2] capelas@ime.unicamp.br

e novos e recentes trabalhos com resultados promissores certamente serão apresentados. Assim, neste trabalho temos como objetivo investigar a unicidade de soluções suaves para equações de Navier-Stokes tempo-fracionária N-dimensional conforme o problema Eq.(2) a seguir [8].

Então, considere a seguinte equação de Navier-Stokes tempo-fracionária N-dimensional no espaço $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ dada por

$$\left\{\begin{array}{rcl} {}^{C}\mathbb{D}_t^{\alpha} u & = & \Delta u - (u \cdot \nabla) u - \nabla p \\ \nabla \cdot u & = & 0 \\ & & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T) \end{array}\right. \tag{1}$$

onde ${}^{C}\mathbb{D}_t^{\alpha} u(\cdot)$ é a derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha \in (0,1)$, $u = u(x,t) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^N$, $p(x,t) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é a pressão (desconhecida) cujo papel é manter a divergência igual a 0, ∇ é o operador diferencial $(\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$, $\nabla \cdot u$ é o divergente de u, Δ é o operador de Laplace, enquanto $(u \cdot \nabla)$ é o operador de derivação $u_1\partial_{x_1} + u_2\partial_{x_2} + \cdots + u_N\partial_{x_N}$. Também temos: $(u \cdot \nabla) u = \sum\limits_j \partial_j \left(u^j u\right)$; $p = (-\Delta)^{-1} \sum\limits_{j,k} \partial_j \partial_k \left(u^j u^k\right)$; $\mathbb{P} = I_d - \nabla \Delta^{-1} \nabla = I_d + R \otimes \mathrm{R}$ onde $R = \dfrac{1}{\sqrt{-\Delta}} \nabla$ é a transformada de Riesz e $R = (R_1, ..., R_N)$, $\widehat{R_j f} = i \dfrac{\xi_j}{|\xi|} \widehat{f}$.

Aplicando o projetor $\mathbb{P}$ em ambos os lados da Eq.(1) e usando a condição de divergência, temos $\mathbb{P}u = u$, $\mathbb{P}\ {}^{C}\mathbb{D}_t^{\alpha} u = {}^{C}\mathbb{D}_t^{\alpha} u$ e $\mathbb{P}\nabla p = 0$ e substituindo o termo $(u \cdot \nabla) u$ por $\nabla \cdot (u \otimes u) = (\nabla \cdot u) u + (u \cdot \nabla) u$ (derivações são levadas no sentido de distribuições).

Assim, temos o problema de Cauchy da equação de Navier-Stokes tempo-fracionária incompreensível em $\mathbb{R}^N$, dada por

$$\left\{\begin{array}{ccl} {}^{C}\mathbb{D}_t^{\alpha} u - \Delta u + \mathbb{P}\nabla \cdot (u \otimes u) u & = & 0, \text{ para } t \in [0,T),\ x \in \mathbb{R}^N \\ \nabla \cdot u & = & 0, \text{ para } t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N \\ u(0) & = & u_0(x). \end{array}\right. \tag{2}$$

Ao longo deste trabalho a velocidade u_0 satisfaz $\nabla \cdot u_0 = 0 \cdot T$ com $0 < T \leq \infty$, o chamado intervalo de tempo, e $t \in [0,T)$ a variável temporal.

2 Preliminares

O espaço de Schwartz ou das funções decrescentes rapidamente sobre $\mathbb{R}^N$, é dado por [5],

$$S := \left\{ u \in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right) : \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left| x^{\xi} \partial^{\delta} u(x) \right| < \infty, \forall \xi, \delta \in \mathbb{N}^N \right\},$$

para quaisquer multi-indíces ξ e δ.

Seja $s \in (0,1)$. O Laplaciano fracionário de ordem s de uma função $u \in S$, no qual denotamos por $(-\Delta)^s u$, é definido por [3]

$$(-\Delta)^s u(x) := C(N,s)\ \text{V.P} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u(x) - u(y)}{|x-y|^{N+2s}} dy \tag{3}$$

onde $C\left(N,s\right) := \dfrac{2^{2s}s\Gamma\left(s+\frac{N}{2}\right)}{\pi^{N/2}\Gamma\left(1-s\right)}$ é uma constante de normalização

Fixado $T>0$, usaremos a notação [5]

$$\|g\|_{p,q,T} = \left(\int_0^T \|g\|^q_{L^p(\mathbb{R}^N)^N}\,dt\right)^{1/q}, 1 \leq p \leq \infty,\ 1 \leq q \leq \infty \tag{4}$$

o que significa a norma do espaço $L^q\left((0,T)\,;L^p\left(\mathbb{R}^N\right)^N\right)$ com a modificação óbvia se $q=\infty$.

Agora, considere a seguinte desigualdade [8]

$$(a+b)^\beta \leq 2^{\beta-1}\left(a^\beta + b^\beta\right) \tag{5}$$

sempre $a,b \geq 0$ e $\beta \geq 1$.

Teorema 2.1. $[1,2,5]$ (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) *Admita que* $1 \leq p \leq N$. *Então, existe uma constante* C, *dependente somente de* p *e* N *tal que*

$$\|u\|_{L^{\frac{pN}{N-p}}(\mathbb{R}^N)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \tag{6}$$

para todo $u \in C_0^1\left(\mathbb{R}^N\right)$.

Teorema 2.2. [6] (Desigualdade de Gronwall) *Sejam* u *e* v *duas funções integráveis e* g *contínua, com domínio* $[0,T]$. *Seja* $\psi \in C^1[0,T]$ *uma função crescente tal que* $\psi'(t) \neq 0$, $t \in [0,T]$. *Admita que:* u *e* v *são não negativas e* g *é não negativa e não decrescente. Se*

$$u(t) \leq v(t) + g(t)\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[g(t)\,\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(\alpha k)}\psi'(\tau)\,(\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha k-1}\,v(\tau)\,d\tau$$

$t \in [0,T)$, *e* v *uma função não decrescente sobre* $[0,T]$, *então*

$$u(t) \leq v(t)\,\mathbb{E}_\alpha\left(g(t)\,\Gamma(\alpha)\,[\psi(T)-\psi(0)]^\alpha\right), \forall t \in [0,T] \tag{7}$$

onde $\mathbb{E}_\alpha(\cdot)$ *é a função de Mittag-Leffler de um parâmetro.*

Seja $q:\mathbb{R}^N \times [0,T) \to \mathbb{R}^N$. A integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha \in (0,1]$ da função q é definida como [7]

$$I_t^\alpha q(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (t-\tau)^{\alpha-1}\,q(x,\tau)\,d\tau,\ t>0,$$

enquanto, a derivada fracionária de Caputo de ordem α da função q é definida por [7]

$${}^{C}\mathbb{D}_t^\alpha q(x,t) := \partial_t^\alpha q(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\,\frac{\partial}{\partial\tau}q(x,\tau)\,d\tau,\ t>0.$$

Seja M_α a função de Mainardi, dada por

$$M_\alpha(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\theta^n}{n!\Gamma(1-\alpha(1+n))},$$

caso particular da função de Wright [3]. Vale o resultado:

Proposição 2.1. [3] *Para* $\alpha \in (0,1)$, $-1 < r < \infty$, *e* M_α *restrita à linha real positiva,* $M_\alpha(t) \geq 0$ *para todo* $t \geq 0$ *temos*

$$\int_0^\infty t^r M_\alpha(t)\, dt = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha r + 1)}.$$

Por outro lado, temos as funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros dadas por $\mathbb{E}_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$ e $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$, respectivamente.

A solução suave da Eq.(2), é dada pela seguinte equação integral [4]

$$u(t) = \mathbb{E}_\alpha(t^\alpha \Delta) u_0 - \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left((t-\tau)^\alpha \Delta\right) \mathbb{P}\nabla.(u \otimes u)(\tau)\, d\tau \tag{8}$$

onde

$$\mathbb{E}_\alpha(t^\alpha \Delta) v(x) = \left((4\pi t^\alpha)^{-\frac{N}{2}} \int_0^\infty \theta^{-\frac{N}{2}} M_\alpha(\theta) \exp\left(\frac{-|\cdot|^2}{4\theta t^2} \right) d\theta * v \right)(x)$$

e

$$\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}(t^\alpha \Delta) v(x) = \left((4\pi t^\alpha)^{-\frac{N}{2}} \int_0^\infty \alpha\theta^{1-\frac{N}{2}} M_\alpha(\theta) \exp\left(\frac{-|\cdot|^2}{4\theta t^2} \right) d\theta * v \right)(x).$$

A solução suave $u \in C\left([0,T), L^N\left(\mathbb{R}^N\right)^N\right)$ está associada, à condição inicial $u_0 \in L^N\left(\mathbb{R}^N\right)^N$ com $\nabla \cdot u_0 = 0$.

Antes de investigar o principal resultado do trabalho, precisamos dos seguintes resultados.

Lema 2.1. [8] *Seja* $1 < p, q < \infty$, $0 < T < \infty$. *Se* $g \in L^q\left((0,T); L^p\left(\mathbb{R}^N\right)^N\right)$, *a função*

$$u(t) = \mathbb{E}_\alpha(t^\alpha \Delta) u_0 + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left((t-\tau)^\alpha \Delta\right) \mathbb{P}g(\tau)\, d\tau \tag{9}$$

pertence a $L^q\left((0,T); L^p\left(\mathbb{R}^N\right)^N\right)$ *e resolve o seguinte problema de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} {}^C\mathbb{D}_t^\alpha u - \Delta u & = & \mathbb{P}g \text{ para quase todo } t \in (0,T) \\ u(0) & = & 0 \end{array} \right. \tag{10}$$

Além disso, a solução u *satisfaz a seguinte estimativa*

$$\|\Delta u\|_{p,q,T} \leq C \|g\|_{p,q,T} \tag{11}$$

com $C = C(p,N,q) > 0$ *independente de* g *e* T.

Lema 2.2. [8] *Seja* $g \in L^q\left((0,T); L^p\left(\mathbb{R}^N\right)^{N^2}\right)$ *onde* $1 < p, q < \infty$, $0 < T < \infty$. *Então, existe uma única solução* $v = (-\Delta)^{-1/2} u$ *pertencente a* $L^q\left((0,T); L^p\left(\mathbb{R}^N\right)^N\right)$ *que resolve o seguinte problema de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} {}^C\mathbb{D}_t^\alpha v - \Delta v & = & \mathbb{P}(-\Delta)^{-1/2} \nabla \cdot g, \text{ quase todo } t \in (0,T) \\ v(0) & = & 0, \end{array} \right.$$

satisfazendo as seguintes estimativas

$$\|\nabla u\|_{p,q,T} \leq C \|g\|_{p,q,T}$$

e

$$\|u\|_{\frac{pN}{N-p},q,T} \leq C \|g\|_{p,q,T}\,,\ 1 < p < N \tag{12}$$

com $C = C(p, N, q) > 0$ *independente de* g *e* T.

3 Unicidade de Soluções Suaves

Nesta seção, vamos investigar a unicidade de soluções suaves para equações de Navier-Stokes tempo-fracionárias, por meio de estimativas, conforme os Lema 2.1 e Lema 2.2, e também por meio da desigualdade de Gronwall (Teorema 2.2).

Teorema 3.1. [8] *Seja* $0 < T \leq \infty$ *e* $u, v \in C\left([0,T); L^N\left(\mathbb{R}^N\right)^N\right)$ *duas soluções da equação de Navier-Stokes tempo-fracionária sobre* $(0,T) \times \mathbb{R}^N$ *com a mesma condição inicial* u_0. *Então,* $u = v \in [0,T)$.

Demonstração. Primeiramente, precisamos que para $u, v \in C\left([0,T); L^N\left(\mathbb{R}^N\right)^N\right)$ e um $\varepsilon > 0$ arbitrário positivo, existam as seguintes decomposições $u = u_1 + u_2$ e $v = v_1 + v_2$ tal que para todo $T > 0$,

$$\|u_1\|_{C\left([0,T);L^N(\mathbb{R}^N)^N\right)} \leq \varepsilon \ \ ; \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times(0,T)} |u_2(x,t)| < K(\varepsilon) \tag{13}$$

e

$$\|v_1\|_{C\left([0,T);L^N(\mathbb{R}^N)^N\right)} \leq \varepsilon \ \ ; \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times(0,T)} |v_2(x,t)| < K(\varepsilon)\,. \tag{14}$$

Podemos simplesmente escolher

$$u_2(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & \text{para} \quad |u(x,t)| < K \\ 0, & \text{para} \quad |u(x,t)| \geq K \end{cases} \text{ e } v_2(x,t) = \begin{cases} v(x,t), & \text{para} \quad |v(x,t)| < K \\ 0, & \text{para} \quad |v(x,t)| \geq K \end{cases}.$$

Agora, admita que u e v são soluções em $C\left([0,T); L^N\left(\mathbb{R}^N\right)^N\right)$ com as mesmas condições iniciais, digamos que sejam $u(0) = v(0) = \mu$, a diferença $w = u - v$ é uma solução da equação integral

$$w(t) = -\int_0^T (t-\tau)^{\alpha-1}\, \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left((t-\tau)^\alpha \Delta\right) \mathbb{P}\nabla \cdot (w \otimes u + v \otimes w)(\tau)\, d\tau.$$

Agora, considere as seguintes funções

$$w_1(t) = -\int_0^T (t-\tau)^{\alpha-1}\, \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left((t-\tau)^\alpha \Delta\right) \mathbb{P}\nabla \cdot (w \otimes u_1 + v_1 \otimes w)(\tau)\, ds$$

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0436

e

$$w_2(t) = -\int_0^T (t-\tau)^{\alpha-1}\, \mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left((t-\tau)^{\alpha}\Delta\right)\mathbb{P}\nabla\cdot\left(w\otimes u_2 + v_2\otimes w\right)(\tau)\, ds.$$

Usando o fato que o operador de convolução $\mathbb{E}_{\alpha,\alpha}\left((t-\tau)^{\alpha}\Delta\right)\mathbb{P}\nabla$, tem um núcleo integrável cuja norma é $O\left((t-\tau)^{-\alpha/2}\right)$ em L_1, usando as estimativas Eq.(13) e Eq.(14) e a desigualdade de Hölder repetidamente no tempo, temos

$$\begin{aligned}
\|w_2(t)\|_{L^N} &\leq C\int_0^T (t-\tau)^{\frac{\alpha}{2}-1}\|w(\tau)\|_{L^p}\left(\|u_2(\tau)\|_{L^\infty} + \|v_2(\tau)\|_{L^\infty}\right)d\tau \\
&\leq 2CK(\varepsilon)\left(\int_0^T (t-\tau)^{\frac{2}{3}(\alpha-2)}\,d\tau\right)^{3/4}\left(\int_0^T \|w(\tau)\|_{L^p}^4\,d\tau\right)^{1/4} \\
&\leq 2CK(\varepsilon)\,t^{\frac{2\alpha-1}{4}}\left(\int_0^T \|w(\tau)\|_{L^p}^4\,d\tau\right)^{1/4} \qquad (15)
\end{aligned}$$

onde C denota a constante independente de w, t.

Agora, elevando a quarta potência ambos os lados da desigualdade (15) e tomando a integral com respeito a $\tau\in(0,T)$, temos

$$\int_0^T \|w_2(\tau)\|_{L^N}^4\,d\tau \leq 2C^4\left(K(\varepsilon)\right)^4 T^{2\alpha-1}\int_0^T\left(\int_0^T \|w(\tau)\|_{L^p}^4\,d\tau\right)d\tau. \qquad (16)$$

Por outro lado, pela estimativa Eq.(12) do Lemma 2.2, das estimativas Eq.(13) e Eq.(14), da desigualdade de Hölder e da desigualdade Eq.(5), temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|w_1(\tau)\|_{L^N}^4\,d\tau &\leq C\int_0^T \|\left(w\otimes(u_1+v_1)\right)(\tau)\|_{L^{\frac{N}{2}}}^4\,d\tau \\
&\leq C\left(\|u_1(\tau)\|_{C\left([0,T);L^N(\mathbb{R}^N)^N\right)} + \|v_1(\tau)\|_{C\left([0,T);L^N(\mathbb{R}^N)^N\right)}\right)\int_0^T \|w(\tau)\|_{L^N}^4\,d\tau \\
&\leq 2\varepsilon C\int_0^T \|w(\tau)\|_{L^N}^4\,d\tau.
\end{aligned}$$

Então, se escolhermos ε pequeno, então pela desigualdade Eq.(16), temos

$$\int_0^T \|w_1(\tau)\|_{L^N}^4\,d\tau \leq \widetilde{C}\left(K(\varepsilon)\right)^4\int_0^T\left(\int_0^\tau \|w(\tau)\|_{L^N}^4\,ds\right)d\tau$$

$0\leq\tau\leq T$.

Pela desigualdade de Gronwall (Teorema 2.2), temos

$$\int_0^T \|w_1(\tau)\|_{L^N}^4\,d\tau \leq 0.\mathbb{E}_{\alpha}\left(\widetilde{C}\left(K(\varepsilon)\right)^4 T^{2\alpha-1}\int_0^\tau \|w(\tau)\|_{L^N}^4\,ds\right) = 0,$$

isso implica que $\int_0^T \|w_1(\tau)\|_{L^N}^4\,d\tau = 0 \Longleftrightarrow w(\tau)=0$. Portanto, $u=v$. $\square$

4 Conclusões

Investigamos a unicidade de soluções suaves para equações de Navier-Stokes tempo-fracionária em $L^N\left(\mathbb{R}^N\right)^N$, por meio de estimativas e da desigualdade de Gronwall. Uma consequência direta dos resultados aqui obtidos, reside no fato que quando $\alpha = 1$, recuperamos o resultado válido para a clássica equação de Navier-Stokes.

Agradecimentos

(JVCS) agradece pelo apoio financeiro da bolsa PNPD-CAPES do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada IMECC-Unicamp.

Referências

[1] Y. Giga, H. Sohr. Abstract L^p estimates for the Cauchy problem with applications to the Navier-Stokes equations in exterior domains, *J. Funct. Anal.*, 102 (2017) 218–228.

[2] S. Monniaux. Uniqueness of mild solutions of the Navier-Stokes equation and maximal L^p-regularity, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 328(8) (1999) 663–668.

[3] P. M. de C. Neto, G. Planas. Mild solutions to the time fractional Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^N$, *J. Diff. Equ.*, 259(7) (2015) 2948–2980.

[4] L. Peng, Y. Zhou, B. Ahmad, A. Alsaedi. The Cauchy problem for fractional Navier-Stokes equations in Sobolev spaces, *Chaos, Solitons & Fractals*, 102 (2017) 218–228.

[5] H. Sohr. *The Navier–Stokes equations: An elementary functional analytic approach*, Birkhäuser Advanced Texts, Basel, 2001.

[6] J. Vanterler da C. Sousa, E. Capelas de. A Gronwall inequality and the Cauchy-type problem by means of ψ-Hilfer operator, *Diff. Equ. & Appl.*, 11(1) (2019), 87–106.

[7] J. Vanterler da C. Sousa, E. Capelas de Oliveira. On the ψ-Hilfer fractional derivative, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 60 (2018) 72–91.

[8] J. Vanterler da C. Sousa, E. Capelas de Oliveira. On the uniqueness of mild solutions to the time-fractional Navier-Stokes equations in $L^N\left(\mathbb{R}^N\right)^N$, *Submetido à publicação*, (2019).

