Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma nova classe de soluções suaves e fortes para equações integro-diferenciais fracionárias

J. Vanterler da C. Sousa[1]
E. Capelas de Oliveira [2]
[1,2] Departamento de Matemática Aplicada, Imecc-Unicamp, Campinas, SP, 13083-859, Brasil

Resumo. O campo das equações diferenciais ao longo de décadas, desafia os matemáticos com problemas além de serem intrigantes e desafiadores, contribuem para o crescimento da matemática. Um dos desafios que passa a ganhar destaque, é investigar propriedades de soluções de equações diferenciais fracionárias. Nesse sentido, no presente trabalho, investigamos a existência e unicidade de uma nova classe de soluções suaves e fortes das equações integro-diferenciais fracionárias no sentido da derivada fracionária de Hilfer no espaço de Banach, por meio do C_0-semigrupo contínuo, do teorema do ponto fixo de Banach e da desigualdade de Gronwall.

Palavras-chave. Equações integro-diferenciais fracionárias, soluções suaves e fortes, existência e unicidade, C_0-semigrupo contínuo, teorema do ponto fixo de Banach, desigualdade de Gronwall.

1 Introdução

Ao longo de décadas, as equações diferenciais têm sido um campo muito frutífero, tanto no sentido de teoria quanto no sentido prático. Numerosos e importantes resultados sobre a existência e unicidade de soluções suaves e fortes de equações diferenciais e integro-diferenciais foram investigados e publicados, ao longo dos anos [2, 7]. Por outro lado, com a expansão do cálculo fracionário, em particular, com novas definições de derivadas fracionárias e integrais, muitos pesquisadores passaram a utilizar essas derivadas e integrais fracionárias nas equações diferenciais para obter novos resultados [5, 6, 8, 10]. Assim, a partir da junção do cálculo fracionário e dos diferentes tipos de equações diferenciais e integro-diferenciais: impulsivas, funcionais, evolutivas com impulsos instantâneos e não instantâneos, surgiram novos e aplicáveis resultados o que, cada vez mais, consolida a relação dessas áreas [1, 3, 4, 12, 13].

Nesse trabalho, vamos investigar a existência e unicidade de soluções suaves e fortes da equação integro-diferencial fracionária (EIF), dada por [11]

$$ {}^{\mathbf{H}}\mathbb{D}_{0+}^{\mu,\nu}u\left(t\right)+\mathcal{A}u(t)=f\left(t,u\left(t\right)\right)+\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{t_0}^{t}\mathbb{H}^{\mu}(t,s)\mathbf{K}(t,s,u(s))ds \tag{1} $$

[1]vanterler@ime.unicamp.br
[2]capelas@ime.unicamp.br

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0460

com a condição inicial local dada por

$$I_{t_0+}^{1-\gamma}u\,(t_{0+}) + g(t_1, ..., t_p, u(\cdot)) = u_0$$

onde ${}^{\mathbf{H}}\mathbb{D}_{0+}^{\mu,\nu}(\cdot)$ é a derivada fracionária de Hilfer, $I_{t_0}^{1-\gamma}(\cdot)$ é a integral fracionária de Riemann-Liouville $0 < \mu \leq 1$, $0 \leq \nu \leq 1$, $\gamma = \mu + \nu(1-\mu)$, $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_p \leq t_0 + a$ $(t \in (t_0, t_0 + a])$, $-\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(\mathbb{S}(t))_{t\geq 0}$ sobre o espaço de Banach Ω e $f : I \times \Omega \to \Omega$, $g(t_1, ..., t_p, \cdot) : \Omega \to \Omega$, $k : \Delta \times \Omega \to \Omega$, $\Delta = |(t,s) : t_0 \leq s \leq t \leq t_0 + a|$ e $\mathbb{H}^{\mu}(t,s) := \psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\mu-1}$.

Alguns pontos merecem destaque em relação aos principais resultados obtidos neste trabalho:

- Apresentamos uma nova classe de soluções suaves e fortes para a equação integro-diferencial fracionária. Esta classe pode ser obtida a partir da escolha dos parâmetros μ e ν. Note que a partir da escolha dos limites $\nu \to 1$ e $\nu \to 0$ ambos na Eq.(1) como na sua respectiva solução Eq.(3), a seguir, obtemos as clássicas versões fracionárias de Caputo e Riemann-Liouville.

- Investigamos a existência e unicidade de soluções suaves e fortes da equação integro-diferencial fracionária no espaço de Banach Ω.

2 Preliminares

Seja $n-1 < \mu \leq n$ com $n \in \mathbb{N}$, $J := [t_0, t]$ e $f \in C^n(J, \mathbb{R})$, para todo $t \in J$. A derivada fracionária de Hilfer à esquerda ${}^{\mathbf{H}}\mathbb{D}_{0+}^{\mu,\nu}(\cdot)$ da função f de ordem μ e tipo $0 \leq \nu \leq 1$ é definida por [10]

$${}^{\mathbf{H}}\mathbb{D}_{0+}^{\mu,\nu}u(t) = I_{t_0+}^{\nu(n-\mu)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{t_0+}^{(1-\nu)(n-\mu)}u(t), \tag{2}$$

onde $I_{t_0+}^{\nu}(\cdot)$ é a integral fracionária de Riemann-Liouville.

Definição 2.1. [11] *Uma solução contínua u dada pela equação integral*

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathbb{S}_{\mu,\nu}(t)[u_0 - g\,(t_1, ..., t_p, u\,(\cdot))] + \int_{t_0}^{t} \mathcal{K}_\nu(t-s) f(s, u(s)) ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{t_0}^{t} \mathcal{K}_\nu(t-s) \int_{t_0}^{s} \mathbb{H}^{\mu}(s,\tau) \mathbf{K}(s, \tau, u(\tau)) d\tau ds \end{aligned} \tag{3}$$

é dita ser uma solução suave da Eq.(1) *sobre I, satisfazendo a condição inicial onde $\mathcal{K}_\nu\,(t) = t^{\gamma-1}\mathbf{G}_\nu\,(t)$, $\mathbf{G}_\nu\,(t) = \displaystyle\int_0^\infty \nu\theta \mathbf{M}_\nu\,(\theta)\,\mathbf{P}\,(t^\nu\theta)\,d\theta$ e $\mathbb{S}_{\mu,\nu}\,(t) = I_\theta^{\nu(1-\mu)}\mathcal{K}_\nu\,(t)$, onde $\mathbf{M}_\nu$ é a função de Mainardi.*

Definição 2.2. [11] *Uma função u é dita ser uma solução forte da* Eq.(1) *sobre I satisfazendo a condição inicial, se u é diferenciável em quase todo lugar em I*

$$\begin{aligned} &{}^{\mathbf{H}}\mathbb{D}_{t_0+}^{\mu,\nu}u\,(t) \in L'\,((t_{0+}, t_{0+} + a], \Omega) \\ &I_{t_0+}^{1-\gamma}u\,(t) + g\,(t_1, ..., t_p, u\,(\cdot)) = u_0 \end{aligned} \tag{4}$$

e

$$ {}^{\mathbf{H}}\mathbb{D}^{\mu,\nu}_{t_0+}u\left(t\right)+\mathcal{A}\left(t\right)=f\left(t,u\left(t\right)\right)+\frac{1}{\Gamma\left(\mu\right)}\int_{t_0}^{t}\mathbb{H}^{\mu}\left(t,s\right)\mathbf{K}\left(t,s,v\left(s\right)\right)ds, \qquad (5) $$

$t\in(t_0,t_0+a]$.

Teorema 2.1. [9] (Desigualdade de Gronwall) *Sejam u e v duas funções integravéis e g contínua, com domínio $[a,b]$. Seja $\psi\in C^1[a,b]$ uma função crescente tal que $\psi'(t)\neq 0$, $t\in[a,b]$. Admita que: u e v são não-negativas e g é não-negativa e não decrescente. Se*

$$ u(t)\leq v(t)+g(t)\int_a^t\psi'(\tau)(\psi(t)-\psi(\tau))^{\alpha-1}u(\tau)d\tau $$

então

$$ u(t)\leq v(t)+\int_a^t\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(g(t)\Gamma(\alpha))^k}{\Gamma(\alpha k)}\psi'(\tau)(\psi(t)-\psi(\tau))^{k\alpha-1}v(\tau)d\tau, $$

$t\in[a,b]$. Além disso, se v é uma função não decrescente em $[a,b]$, então temos

$$ u(t)\leq v(t)\mathbb{E}_\alpha(g(t)\Gamma(\alpha)(\psi(t)-\psi(a))^\alpha),\ t\in[a,b], $$

onde $\mathbb{E}_\alpha(\cdot)$ é a função de Mittag-Leffler de um parâmetro.

3 Principais Resultados

3.1 Existência e unicidade de solução para EIF

Em primeiro lugar, para a discussão dos principais resultados que serão apresentados através dos teoremas, algumas condições são necessárias e suficientes para obtê-las. Nesse sentido, temos:

CONDIÇÕES I:

1. Ω é o espaço de Banach com $||(\cdot)||_{C_{1-\gamma}}$ e $u_0\in\Omega$;

2. $0\leq t_0<t_1<...<t_p\leq t_0+a$ e $B_r=\left\{v:||v||_{C_{1-\gamma}}\leq r\right\}\subset\Omega$;

3. $f:I\times\Omega\to\Omega$ é contínua em t sobre I e existe uma constante $\mathbf{L}\geq 0$ tal que

$$ ||f(s,v_1)-f(s,v_2)||_{C_{1-\gamma}}\leq\mathbf{L}||v_1-v_2||_{C_{1-\gamma}},\text{para s}\in I,\ v_1,v_2\in B_r; $$

4. $\mathbb{H}:\Delta\times\Omega\to\Omega$ é contínua e $\exists\ \mathbf{K}_0>0$ tal que

$$ ||g(t,s,x)-g(t,s,y)||_{C_{1-\gamma}}\leq\mathbf{K}_0||x-y||_{C_{1-\gamma}}; $$

5. $g:I^p\times\Omega\to\Omega$ e $\exists\ \mathbf{Q}_0>0$ tal que

$$ ||g(t_1,...,t_p,u_1(\cdot))-g(t_1,...,t_p,u_2(\cdot))||_{C_{1-\gamma}}\leq\mathbf{Q}_0||t^{1-\gamma}x-y||_{C_{1-\gamma}};\forall u_1,u_2\in C_{1-\gamma}\left(I,B_r\right); $$

6. $-\mathcal{A}$ é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\left(\mathbb{S}\left(t\right)\right)_{t\geq 0}$ em Ω;

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0460

7. Considere a notação: $\mathbf{M} = \max_{t\in[0,a]} \|\mathbb{S}_{\mu,\nu}(t)\|$; $\mathbf{H} = \max_{s\in I} \left\|s^{1-\gamma} f(s,0)\right\|$;
   $\mathbf{K}_1 = \max_{t_0\leq s\leq t\leq t_0+a} \left\|t^{1-\gamma} k(t,s,0)\right\|$; $\widetilde{\mathbf{G}}_1 = \max_{u\in C_{1-\gamma}(I,B_r)} \left\|t^{1-\gamma} g(t_1,...,t_p,u(\cdot))\right\|$;

8. Admita que

$$\mathbf{M}\left(\|u_0\|_{C_{1-\gamma}} + \widetilde{\mathbf{G}_1} + (\mathbf{L}_r + \mathbf{H})\,a + \frac{(\mathbf{K}_0 r + \mathbf{K}_1)}{\Gamma(\mu)^2}\left(\psi(t_0+a) - \psi(t_0)\right)^{\mu} a\right) \leq r \quad (6)$$

e

$$\mathbf{M}\mathbf{Q}_0 + \mathbf{M}\mathbf{L}a + \frac{\mathbf{M}\mathbf{K}_0 a}{\Gamma(\mu)^2}\left(\psi(t_0+a) - \psi(t_0)\right)^{\mu} < 1. \quad (7)$$

Teorema 3.1. [11] *A equação integro-diferencial com condições não locais dada pela* Eq.(1)*, tem uma única solução sobre* I*.*

Demonstração. Seja $\Omega := C_{1-\gamma}(I,B_r)$. Considere o seguinte operador

$$\begin{aligned}(\mathfrak{F})(t) &= \mathbb{S}_{\mu,\nu}(t)\,u_0 - \mathbb{S}_{\mu,\nu}(t)\,g(t_1,...,t_p,v(\cdot)) + \int_{t_0}^{t} \mathcal{K}_\nu(t-s)\,f(s,v(s))\,ds \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_{t_0}^{t}\mathcal{K}_\mu(t-s)\int_{t_0}^{s}\mathbb{H}^{\mu}(s,\tau)\,\mathbf{K}(s,\tau,v(\tau))\,d\tau ds, \quad t\in I \end{aligned} \quad (8)$$

onde $\mathcal{K}_\nu(t) = t^{\nu-1}G_\nu(t)$, $G_\nu(t) = \int_0^\infty \nu\theta M_\nu(\theta)\,S_{\mu,\nu}(t^\nu\theta)\,d\theta$, $S_{\mu,\nu}(t) = I_\theta^{\nu(1-\mu)}\mathcal{K}_\nu(t)$, $0<\mu\leq 1$ e $0\leq\nu\leq 1$.

Usando as **CONDIÇÕES** (I.1)-(I.8), obtemos

$$\begin{aligned} &\left\|t^{1-\gamma}(\mathfrak{F}v)(t)\right\| \leq \mathbf{M}\|u_0\|_{C_{1-\gamma}} + \mathbf{M}\widetilde{\mathbf{G}_1} + \mathbf{M}(\mathbf{L}r+\mathbf{H})\int_{t_0}^{t} ds \\ &+ \frac{\mathbf{M}(\mathbf{K}_0 r+\mathbf{K}_1)}{\Gamma(\mu)}\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s} N^{\mu}(s,\tau)\,d\tau ds \\ \leq\ & \mathbf{M}\left[\|u_0\|_{C_{1-\gamma}} + \widetilde{\mathbf{G}_1} + (\mathbf{L}r+\mathbf{H})\,a + \frac{(\mathbf{K}_0 r+\mathbf{K}_1)\left(\psi(t_0+a)-\psi(t_0)\right)^{\mu} a}{\Gamma(\mu)^2}\right] \leq r; \end{aligned}$$

para $v\in\Omega$. Então, concluímos que $F\Omega\subset\Omega$.

Por outro lado, para cada $v_1, v_2\in\Omega$ e $t\in I$, temos

$$\left\|t^{1-\gamma}\left((\mathfrak{F}v_1)(t) - (\mathfrak{F}v_2)(t)\right)\right\| \leq \left(\mathbf{M}\mathbf{Q}_0 + \mathbf{M}\mathbf{L}a + \frac{\mathbf{M}\mathbf{K}_0 a}{\Gamma(\mu)^2}\left(\psi(t_0+a)-\psi(t_0)\right)^{\mu}\right)\|v_1-v_2\|_{C_{1-\gamma}}.$$

Se escolhermos $q := \mathbf{M}\mathbf{Q}_0 + \mathbf{M}\mathbf{L}a + \frac{\mathbf{M}\mathbf{K}_0 a}{\Gamma(\mu)^2}\left(\psi(t_0+a)-\psi(t_0)\right)^{\mu}$, então

$$\|\mathfrak{F}v_1 - \mathfrak{F}v_2\|_{C_{1-\gamma}} = \sup_{t\in I}\left\|t^{1-\gamma}\left((\mathfrak{F}v_1)(t) - (\mathfrak{F}v_2)(t)\right)\right\| \leq q\,\|v_1-v_2\|_{C_{1-\gamma}} \quad (9)$$

com $0<q<1$.

Então, temos que $\mathfrak{F}$ é uma contração sobre Ω. Aplicando o teorema do ponto fixo de Banach, concluímos que, o operador $\mathfrak{F}$ admite um único ponto fixo no espaço Ω e nesse sentido é solução suave da Eq.(1) sobre I, satisfazendo a condição inicial. $\square$

3.2 Existência e unicidade de um solução forte para EIF

Como antes, as condições para obter a existência e singularidade de soluções suaves, aqui vamos utilizar o mesmo procedimento. Nesse sentido, temos:
CONDIÇÕES II:

1. Ω é um espaço de Banach reflexivo com norma $\|\cdot\|_{C_{1-\gamma}}$ e $u_0 \in \Omega$;
2. $0 \leq t_0 \leq t_1 < ... < t_p \leq t_0 + a$ e $B_r := \left\{v : \|v\|_{C_{1-\gamma}} \leq r\right\} \subset \Omega$;
3. $f : I \times \Omega \to \Omega$ é contínua em t sobre I e $\exists \mathbf{L} > 0$ tal que
$$\|f(s_1, v_1) - f(s_2, v_2)\|_{C_{1-\gamma}} \leq \mathbf{L}\left(\|s_1 - s_2\|_{C_{1-\gamma}} + \|v_1 - v_2\|_{C_{1-\gamma}}\right) \tag{10}$$
para $s_1, s_2 \in I$ and $v_1, v_2 \in B_r$;
4. $\mathbf{K} : \Delta \times \Omega \to \Omega$ é contínua e $\exists \mathbf{K}_0 > 0$ tal que
$$\|\mathbf{K}(t_1, s, x) - \mathbf{K}(t_2, s, y)\|_{C_{1-\gamma}} \leq \mathbf{K}_0\left(|t_1 - t_2| + \|x_1 - x_2\|_{C_{1-\gamma}}\right); \tag{11}$$
5. $g : I^p \times \Omega \to \Omega$ e $\exists \mathbf{G}_0 > 0$ tal que
$$\|g(t_1, ..., t_p, u(\cdot)) - g(t_1, ..., t_p, u(\cdot))\|_{C_{1-\gamma}} \leq \mathbf{G}_0 \sup_{t \in I} \left\|t^{1-\gamma}(u_1(t) - u_2(t))\right\|; \tag{12}$$
para $u_1, u_2 \in C_{1-\gamma}(I, B_r)$ e $g(t_1, ..., t_p) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$;
6. $-\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $(\mathbb{S}(t))_{t \geq 0} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$;
7. Considere $u_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$;
8. Admita que $\mathbf{M}\left(\mathbf{Q}_0 + \mathbf{L}a + \dfrac{\mathbf{K}_0 a}{\Gamma(\mu)^2}(\psi(t_0 + a) - \psi(t_0))^{\mu}\right) < 1$.

Teorema 3.2. *A equação integro-diferencial fracionária com condições não-locais dadas pela* Eq.(1)*, tem uma solução forte em* I.

Demonstração. Satisfazendo todas as condições do Teorema 3.1, a Eq.(1) admite uma única solução suave em $C_\gamma(I, B_r)$ que denotamos por u.

Agora, vamos mostrar que esta solução suave é uma solução forte do problema Eq.(1) sobre I. Para qualquer $t \in I$ e usando as **(CONDIÇÕES II)**, observamos que

$$\left\|t^{1-\gamma}(u(t+h) - u(t))\right\| \leq \widetilde{\mathbf{P}}h + \mathbf{ML}\int_{t_0}^{t} \mathbb{H}^{\mu}(t, s)\left\|s^{1-\gamma}(u(s+h) - u(s))\right\| ds$$

onde $\widetilde{\mathbf{P}} := 2\mathbf{M}\|u_0\|_{C_{1-\gamma}} + 2\mathbf{M}\widetilde{\mathbf{G}_1} + \mathbf{ML}r + \mathbf{MN} + \mathbf{ML}a - \dfrac{\mathbf{MK}_1 a}{2\Gamma(\mu)} + \dfrac{\mathbf{MK}_1 a^2}{2\Gamma(\mu)}$
$+ \dfrac{\mathbf{MK}_0 r}{\Gamma(\mu+1)}(\psi(t_0 + h) - \psi(t_0))^{\mu} + \dfrac{\mathbf{MK}_0 r}{\Gamma(\mu+1)}(\psi(t_0 + h + a) - \psi(t_0))^{\mu} +$
$\dfrac{\mathbf{MK}_0 r}{\Gamma(\mu+1)}(\psi(t_0 + a) - \psi(t_0))^{\mu} + \dfrac{\mathbf{MK}_1}{\Gamma(\mu+1)}(\psi(t_0 + h + a) - \psi(t_0))^{\mu}$.

DOI: 10.5540/03.2020.007.01.0460

Por meio da desigualdade de Gronwall, temos

$$\left\|t^{1-\gamma}\left(u\left(t+h\right)-u\left(t\right)\right)\right\| \leq \widetilde{\mathbf{P}}h\mathbb{E}_{\mu}\left[\mathbf{ML}\Gamma\left(\mu\right)\left(\psi\left(t\right)-\psi\left(a\right)\right)^{\mu}\right],\ t\in I,$$

onde $\mathbb{E}_{\mu}(\cdot)$ é a função de Mittag-Leffler de um parâmetro.

Portanto, u é Lipschitz contínua em I. A continuidade de Lipschitz u sobre I combinada com (iii) nos garante que $t\rightarrow f\left(t,u\left(t\right)\right)$ é Lipschitz contínua em I. Também, pela suposição (iv), temos $t\rightarrow \dfrac{1}{\Gamma\left(\mu\right)}\displaystyle\int_{t_0}^{t}\mathbb{H}^{\mu}\left(t,s\right)\mathbf{K}\left(t,s,u\left(s\right)\right)ds$ que é Lipschitz contínua em I.

Usando o Teorema 3.1, observamos que a equação

$$\begin{aligned} {}^{H}\mathbb{D}_{t_0+}^{\mu,\nu}v\left(t\right)+\mathcal{A}\left(t\right) &= f\left(t,u\left(t\right)\right)+\frac{1}{\Gamma\left(\mu\right)}\int_{t_0}^{t}\mathbb{H}^{\mu}\left(t,s\right)\mathbf{K}\left(t,s,u\left(s\right)\right)ds \\ I_{t_0}^{1-\gamma}v\left(t_0\right) &= u_0-g\left(t_1,...,t_p,u\left(\cdot\right)\right) \end{aligned}$$

tem uma solução única e forte v em I satisfazendo a equação

$$\begin{aligned} v\left(t\right) &= \mathbb{S}_{\mu,\nu}\left(t\right)\left[u_0-g\left(t_1,...,t_p,u\left(\cdot\right)\right)\right]+\int_{t_0}^{t}\mathbf{K}_{\mu}\left(t-s\right)f\left(s,u\left(s\right)\right)ds \\ &\quad +\int_{t_0}^{t}\mathbf{K}_{\mu}\left(t-s\right)\int_{t_0}^{s}\mathbb{H}^{\mu}\left(s,\tau\right)\mathbf{K}\left(s,\tau,u\left(\tau\right)\right)d\tau ds \\ &= u\left(t\right),\ t\in I. \end{aligned}$$

Consequentemente, u é uma solução forte da Eq.(1) em I, satisfazendo a condição inicial. $\square$

4 Conclusões

Concluímos o trabalho com os objetivos principais alcançados, ou seja, investigamos a existência e unicidade de uma nova classe de soluções suaves e fortes para as equações integro-diferenciais fracionárias de Hilfer no espaço de Banach através do teorema do ponto fixo de Banach e da desigualdade de Gronwall. No entanto, algumas questões permanecem em aberto e são motivações para um trabalho futuro entre elas: a principal é a possibilidade de investigar a existência e a singularidade de soluções suaves e fortes de equações integro-diferenciais e diferenciais fracionárias no sentido da derivada fracionária ψ-Hilfer. Para isso, é necessário obter uma transformada de Laplace com relação a outra função e, nesse sentido, com a obtenção dessa transformada integral, será de suma importância para os pesquisadores que vêm trabalhando no tema.

Agradecimentos

(JVCS) agradece pelo apoio financeiro da bolsa PNPD-CAPES do Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada IMECC-Unicamp.

Referências

[1] A. Al-Omari, H. H. Al-Saadi. Existence of the classical and strong solutions for fractional semilinear initial value problems, *Boundary Value Problems*, 2018 2018:157, 2018.

[2] K. Balachandran, S. Ilamaran. Existence and uniqueness of mild and strong solutions of an semilinear evolution with nonlocal conditions, *Indian J. Pure Appl. Math.* 25 411–418, 1994.

[3] Y.-K. Chang, V. Kavitha, M. M. Arjunan. Existence and uniqueness of mild solutions to a semilinear integrodifferential equation of fractional order, *Nonl. Anal.*, 71 5551–5559, 2009.

[4] A. Chadha, D. N. Pandey. Existence of the mild solution for impulsive neutral stochastic fractional integro-differential inclusions with nonlocal conditions, *Mediterr. J. Math.* 13 (3) 1005–1031, 2016.

[5] H. Gou, B. Li. Local and global existence of mild solution to impulsive fractional semilinear integro-differential equation with noncompact semigroup, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, 42 204–214, 2017.

[6] A. Jawahdou. Mild solutions of fractional semilinear integro-differential equations on an unbounded interval, *Appl. Math.*, 4 (7) 34–39, 2013.

[7] V. Lakshmikantham, P. S. Simeonov. *Theory of impulsive differential equations, Vol. 6,* Singapore: World Scientific, 1989.

[8] E. Capelas de Oliveira, J. Vanterler da C. Sousa. Ulam–Hyers–Rassias stability for a class of fractional integro-differential equations, *Results Math.,* 73 (3) 111, 2018.

[9] J. Vanterler da C. Sousa, E. Capelas de Oliveira. A Gronwall inequality and the Cauchy-type problem by means of ψ-Hilfer operator, *Diff. Equ. & Appl.,* 11(1) 87–106, 2019.

[10] J. Vanterler da C. Sousa, E. Capelas de Oliveira. On the ψ-Hilfer fractional derivative, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.,* 60 72–91, 2018.

[11] J. Vanterler da C. Sousa, D. Ferreira Gomes, E. Capelas de Oliveira. A new class of mild and strong solutions of integro-differential equation of arbitrary order in Banach space, *Semigroup Forum*, submetido, (2019).

[12] J. Vanterler da C. Sousa, K. D. Kucche, E. Capelas de Oliveira. Stability of ψ-Hilfer impulsive fractional differential equations, *Appl. Math. Lett.,* 88 73–80, 2019.

[13] J. Vanterler da C. Sousa, D. S. Oliveira, E. Capelas de Oliveira. On the existence and stability for noninstantaneous impulsive fractional integrodifferential equation, *Math. Meth. Appl. Sci.,* 42 1–13, 2018.

