**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Raízes de polinômios de Legendre: um problema de autovalores

Josadaque da Silva Nenê[1]
Programa de Pós Graduação em Matemática Aplicada, UFRGS
Liliane Basso Barichello[2]
Instituto de Matemática e Estatística, UFRGS

## 1 Introdução

A quadratura de Gauss-Legendre se destaca nos métodos de integração numérica devido a sua versatilidade e precisão. Em aplicações de transporte de partículas, por exemplo, é usada na construção de quadraturas produto multidimensionais na esfera unitária [2]. Neste contexto, a obtenção de forma eficaz das raízes dos polinômios de Legendre é essencial, uma vez que elas definem os nós desta quadratura [3].

Neste trabalho, o problema do cálculo de raízes dos polinômios de Legendre de ordem par é abordado na forma de um problema de autovalores de uma matriz tridiagonal simétrica. São investigados dois métodos para a resolução do problema de autovalores: *Iteração QR implícita com shift de Wilkinson* [5] e *Método da Bissecção* [4].

Um resultado fundamental para o desenvolvimento deste trabalho surge por meio de manipulações algébricas da relação de recorrência de três termos que geram os polinômios de Legendre $P_n$, de forma que, podemos escrevê-la como [1]

$$x^2 P_n^*(x) = \sqrt{a_{n+2}a_{n+1}}P_{n+2}^*(x) + (a_{n+1} + a_n)P_n^*(x) + \sqrt{a_n a_{n-1}}P_{n-2}^*(x) \tag{1}$$

com $P_n(x) = (2/h_n)^{1/2}P_n^*(x), a_n = n^2/(h_n h_{n-1})$ e $h_n = 2n + 1$ para $n = 0, 2, \dots$ . De (1) construímos [1] o problema de autovalores $Tv = x^2 v$, com $T$ matriz tridiagonal simétrica, cujos autovalores, $\lambda = x^2$, são o quadrado das raízes positivas do polinômio de Legendre de ordem par (notando que as raízes aparecem aos pares $\pm$).

## 2 Solução do problema de autovalores

A primeira abordagem investigada na solução do problema de autovalores foi através da *iteração QR implícita com shift de Wilkinson.* Esta abordagem é implícita no sentido que não é necessário computar explicitamente a fatoração $QR$ da matriz $T$, mas construir

[1]josadaque.nene@gmail.com
[2]lbaric@mat.ufrgs.br

 

$Q$ implicitamente como produto de matrizes ortogonais. O *Teorema de Q implícito* [4, 5] garante que a matriz obtida após um passo da *iteração QR implícita* é a matriz desejada. Uma vez que $T$ é tridiagonal, a iteração $QR$ preserva a forma tridiagonal de $T$ [4, 5]. Por fim, adicionalmente à iteração $QR$ implícita utilizamos o shift de Wilkinson definido como [5]

$$\omega = t_{n,n} + r - sign(r)\sqrt{r^2 + (t_{n,n-1})^2} \tag{2}$$

em que $r = (t_{n-1,n-1} - t_{n,n})/2$, $t_{i,j}$ elementos de $T$.

A segunda abordagem investigada se baseia no *método da Bissecção*. No entanto, utilizamos o *Teorema de Inércia de Sylvester* [4] de uma matriz simétrica, o que simplifica a sua implementação. Dado um intervalo $[z_1, z_2)$, podemos identificar se tal intervalo possui algum autovalor de $T$, já que o número de autovalores neste intervalo é igual a $\tau_2 - \tau_1$, com $\tau_2$ e $\tau_1$ sendo o número de autovalores de $T$ menores que $z_2$ e $z_1$, obtidos a partir da *Inércia*$(T - z_2 I)$ e *Inércia*$(T - z_1 I)$, respectivamente [4].

# 3 Comentários Finais

Implementamos em *Fortran 95* um programa em precisão dupla para avaliação de ambos os métodos. Medimos o tempo médio de 100 execuções e o erro relativo do vetor contendo os autovalores encontrados por ambos métodos com o obtido pela rotina *DSTEVD* da biblioteca *LAPACK* para as seguintes ordens de quadratura: 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096 e 8192. Analisando os resultados, a primeira abordagem apresentou erros relativos da ordem $1e-16$ para as ordens 64 e 128, e erros relativos da ordem $1e-15$ para as demais ordens. A segunda abordagem apresentou erros relativos da ordem $1e-16$ para todas as ordens testadas. A rotina *DSTEVD* apresentou o menor tempo computacional dos três métodos (diferença de cerca de $0,4s$ para a maior ordem), o que poderia ser esperado, tendo em vista que as implementações deste trabalho são preliminares e nenhum estudo mais detalhado de otimização para possível redução do tempo foi realizado.

# Referências

[1] L. B. Barichello. Explicit formulations for radiative transfer problems, *Thermal Measurements and Inverse Techniques*, CRC Press, Boca Raton, chapter 15, pages 541-562, 2011.

[2] D. G. Cacuci. *Handbook of Nuclear Engineering.* Springer, New York, 2010.

[3] P. J. Davis and P. Rabinowitz. *Methods of Numerical Integration.* Academic Press, San Diego, 1984.

[4] J. W. Demmel. *Applied Numerical Linear Algebra.* Society For Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1997.

[5] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix Computations, 4th edition.* The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2013.

 