Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Tipos cíclicos de permutações e ordem de grupos

Gabriel de Freitas Pinheiro [1]
Universidade Federal da Grande Dourados - Aluno de iniciação científica
Irene Magalhães Craveiro [2]
Universidade Federal da Grande Dourados - Faculdade de Ciências e Tecnologias - Unidade II

1 Introdução

O conjunto das permutações de n objetos é um grupo com a operação de composição de funções. Em [1] é caracterizado as permutações de n objetos de S_n por meio de produto de ciclos disjuntos e esta representação é única . Uma permutação $\sigma \in S_n$ pode ter ciclos de mesmo comprimento, quando a representamos em produtos de ciclos. Dessa forma, definimos o conceito de tipo cíclico de uma permutação.

Dado $\sigma \in S_n$, o tipo cíclico de σ é um monômio nas indeterminadas $x_{l_1}, \dots, x_{l_s}$, a saber, $T(\sigma) = x_{l_1}^{k_{l_1}} \dots x_{l_s}^{k_{l_s}}$, onde k_{l_j}, $j = 1, \dots, s$, é o número de ciclos de comprimento k_{l_j} que aparecem na decomposição de σ em produto de ciclos. Com o conceito de tipo cíclico definiremos então a partição de um inteiro positivo n.

Assim, usando o conceito de tipo cíclico de uma permutação e partições de um inteiro positivo iremos estabelecer resultados que garantem a existência de permutações de uma certa ordem.

2 Tipos cíclicos de permutações e ordem de grupos

Vamos inicialmente dar a definição de tipos cíclicos de uma permutação e partições de um inteiro positivo. Denotamos por S_n o grupo de permutações de n objetos e por $p(n)$ o total de partições do inteiro positivo n. Dado $\sigma \in S_n$, denotamos por $s(\sigma)$ o número de comprimentos distintos dos ciclos de σ e $k(\sigma)$ o número total de ciclos de σ. Estaremos usando como pré-requisito o conceito de grupos de permutações com suas respectivas propriedades. Em seguida enunciaremos o resultado principal que estabelece uma relação entre os tipos cíclicos de S_n e as ordens de grupos.

[1] freitasgabriel688@gmail.com
[2] irenecraveiro@ufgd.edu.br

Definição 1: Seja $\sigma \in S_n$. O tipo cíclico de σ é definido por $T(\sigma) = x_{l_1}^{k_{l_1}} \dots x_{l_s}^{k_{l_s}}$, onde k_{l_j} é o número de ciclos de comprimento k_{l_j} que aparecem na decomposição de σ, $j = 1, \dots, s$.

Dada $\sigma \in S_n$ podemos escrever um tipo cíclico de σ, $T(\sigma) = x_{l_1}^{k_{l_1}} \dots x_{l_s}^{k_{l_s}} = x_1^{k_{l_1}} x_2^{k_{l_2}} \dots x_n^{k_{l_n}}$, onde k_{l_j} é o número de ciclos de comprimento l_j, com $j = 1, 2, \dots, s(\sigma)$ e $k(\sigma) = \sum_j k_{l_j}$ é o total de ciclos. Nessa nova representação do tipo cíclico de σ, temos que k_j é o número de ciclos de comprimento j, podendo algum k_j ser nulo.

Definição 2: Seja n um inteiro possitivo. Dizemos que a sequência de inteiros positivos $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$ com $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_s$ é uma partição de n se, e somente se $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_s$. Os λ_j são chamados de partes da partição, $j = 1, \dots, s$ e s é o comprimento da partição ou o número de partes da partição.

Com esses conceitos em mãos podemos enunciar um importante teorema que relaciona os tipos cíclicos de uma permutação com as partições de um inteiro positivo n.

Teorema 2.1: Seja n um inteiro positivo tal que $n = k_{l_1} l_1 + k_{l_2} l_2 + \dots + k_{l_s} l_s$, onde k_{l_j} representa o número de vezes que a parte l_j se repete, com $j = 1, 2, \dots, s$ e $l_1 < l_2 < \dots < l_s$. Então existem $\dfrac{n!}{l_1^{k_{l_1}} k_{l_1}! l_2^{k_{l_2}} k_{l_2}! \dots l_s^{k_{l_s}} k_{l_s}!}$ permutações $\sigma \in S_n$ com tipo cíclico $T(\sigma) = x_{l_1}^{k_{l_1}} \dots x_{l_s}^{k_{l_s}}$.

Por fim, sabendo que S_n é um grupo de permutações e que sua ordem é dada pelo menor inteiro positivo l tal que $\sigma^l = e$ enunciaremos o principal resultado desse trabalho que faz a relação entre os tipos cíclicos de permutações e a ordem de um dado grupo.

Teorema 2.2: Se uma permutação $\sigma \in S_n$ possui tipo cíclico $T(\sigma) = x_{l_1}^{k_{l_1}} \dots x_{l_s}^{k_{l_s}}$ então

$$o(\sigma) = mmc[l_1, \dots, l_s].$$

Referências

[1] A. Garcia; Y. Lequain. *Elementos de Álgebra*, 6 edição, IMPA, 2015.

[2] J. P. O. Santos; M. P. Mello; T. I. Murari. *Introdução à Análise Combinatória*, 3 edição, UNICAMP, 2002.

[3] J. P. O. Santos; E. Bovo. *O Teorema de Burnside e Aplicações.* Disponível em: http://www.bienasbm.ufba.br/M37.pdf . Acesso em 11 de setembro de 2018.