Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Existência e decaimento de energia para uma E.D.P. de 4ª ordem não linear envolvendo o operador $p(x)$-Laplaciano

Willian dos Santos Panni [1]
Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia - Universidade Federal Fluminense
Jorge Ferreira [2]
Departamento de Ciências Exatas - VCE - Universidade Federal Fluminense

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência de soluções fracas para uma E.D.P. de quarta ordem não linear envolvendo o operador $p(x)$-Laplaciano sobre um domínio limitado. Para demonstrar a existência de soluções fracas utilizamos o método de Faedo-Galerkin acoplado com resultados de Análise Funcional, espaços de Lebesgue e Sobolev com expoente variável que podem ser encontrados [2] e [3]. Além disso, utilizamos uma técnica introduzida por Nakao em [5] e obtivemos o decaimento exponencial e polinomial das soluções. Está em fase de conclusão a análise numérica e simulação da solução. Ressaltamos que a unicidade da solução fraca é um problema em aberto, entretanto estamos trabalhando para solucionar a aludida conjectura. Estudamos o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta\left(|\Delta u|^{p(x)-2}\Delta u\right) - \Delta\dfrac{\partial u}{\partial t} + f\left(x,t,\dfrac{\partial u}{\partial t}\right) = g\left(x,t\right) \text{ em } Q_T, \\ u = \Delta u = 0 \text{ em } \partial\Omega\times(0,T), \\ u\left(x,0\right) = u_0(x),\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x) \text{ em } \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave, $0 < T < \infty$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$ e as funções p, f, g, u_0 e u_1 satisfazem as seguintes hipóteses:

(H.1) $p : \bar{\Omega} \to (1,\infty)$ é log-Hölder contínua, isto é, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|p(x) - p(y)| \log|x-y| \leq c \quad \forall\, x, y \in \bar{\Omega} \tag{2}$$

e satisfaz

$$1 < p^- = \inf_{\bar{\Omega}} p(x) \leq p^+ = \sup_{\bar{\Omega}} p(x) < \frac{N}{2} \quad \forall\, x \in \bar{\Omega} \tag{3}$$

[1] willianpanni@id.uff.br
[2] ferreirajorge2012@gmail.com

onde $\bar{\Omega}$ denota o fecho de Ω;

(H.2) $f(x,t,s) \in C(\Omega \times [0,\infty) \times \mathbb{R})$ e existem constantes positivas c_1, c_2 e c_3 tais que

$$\begin{cases} f(x,t,s)\, s \geq c_1 \, |s|^{q(x)} - c_3 \\ |f(x,t,s)| \leq c_2 \left(|s|^{q(x)-1} + 1 \right) \end{cases} \tag{4}$$

para todo $(x,t,s) \in \Omega \times [0,\infty) \times \mathbb{R}$, onde $q : \bar{\Omega} \to (1,\infty)$ é log-Hölder contínua satisfazendo

$$1 < q^- = \inf_{\bar{\Omega}} q(x) \leq q(x) < \frac{Np(x)}{N - 2p(x)} \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}; \tag{5}$$

(H.3) $u_0 \in W^{2,p(x)}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ e $g \in L^{q'(x)}(Q_T)$ onde

$$\frac{1}{q(x)} + \frac{1}{q'(x)} = 1 \quad \forall\, x \in \bar{\Omega}. \tag{6}$$

Teorema 1: Sob as hipóteses **(H.1)**, **(H.2)** e **(H.3)** o Problema (1) tem solução fraca.

Teorema 2: Seja $p^- > \max\left\{1, \dfrac{2N}{N+2}\right\}$. Então existem constantes $C > 0$ e $\gamma > 0$ tais que as soluções fracas satisfazem:

Se $q^- \geq 2$, então

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|^2 + |\Delta u(x,t)|^{p(x)} \, dx \leq \begin{cases} Ce^{-\gamma t}, & \forall t \geq 0, \ \text{se } p^+ = 2, \\ C(t+1)^{-\frac{p^+}{p^+-2}}, & \forall t \geq 0, \ \text{se } p^+ > 2; \end{cases} \tag{7}$$

Se $1 < q^- < 2$, então

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|^2 + |\Delta u(x,t)|^{p(x)} \, dx \leq \begin{cases} C(t+1)^{-\frac{p^+(q^- - 1)}{p^+ - q^-}}, & \forall t \geq 0, \ \text{se } p^+ < q^-, \\ Ce^{-\gamma t}, & \forall t \geq 0, \ \text{se } p^+ \geq q^-. \end{cases} \tag{8}$$

Referências

[1] S. Antontsev and J. Ferreira. Existence, uniqueness and blow up for hyperbolic equations with nonstandard growth conditions. *Nonlinear Analysis*, v. 93, p. 62-77, 2013. DOI: 10.1016/j.na.2013.07.019.

[2] L. Diening et al. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. *Lecture Notes in Mathematics*, v. 2017, Springer, Heidelberg, 2011.

[3] X. L. Fan and D. Zhao. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 263, p. 424-446, 2001. DOI:10.1006/jmaa.2000.7617.

[4] J. Ferreira and S. A. Messaoudi. On the general decay of a nonlinear viscoelastic plate equation with a strong damping and $\overrightarrow{p}(x,t)$-Laplacian. *Nonlinear Analysis*, v. 104, p. 40-49, 2014. DOI: 10.1016/j.na.2014.03.010.

[5] M. Nakao. Energy decay for the quasilinear wave equation with viscosity. *Mathematische Zeitschrift*, v. 219, p. 289-299, 1995. DOI: 10.1007/BF02572366.