Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Sistema Óptico com Dois Refletores via Transporte Ótimo de Massa

Raul Oliveira Ribeiro [1]
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP
Matheus Correia dos Santos [2]
Instituto de Matemática e Estatística, UFRGS

1 Apresentação do Problema

Um sistema de transporte óptico é um sistema que transfere sinais luminosos na forma de ondas eletromagnéticas através de um meio utilizando componentes ópticas. O sistema proposto é para transporte de sinais de uma antena fonte passando por dois refletores até uma antena receptora. Essa transferência é realizada em $\mathbb{R}^{n+1}$, onde o domínio Ω representa a antena fonte no hiperplano de entrada do sistema, denotado por α, e o domínio Ψ representa a antena receptora no hiperplano de saída do sistema. Seja d a distância entre os dois hiperplanos, l o comprimento do caminho óptico percorrido pelos sinais, denote $\beta = l - d$. Dados os domínios Ω e Ψ, e funções integráveis não-negativas $I : \Omega \to \mathbb{R}$ e $L : \Psi \to \mathbb{R}$, que representam as intensidades luminosas da entrada e da saída do sistema, queremos determinar as posições e os tipos de refletores que transformem a intensidade da entrada na intensidade da saída. Assume-se que o sistema não tem perdas, o meio de transporte é homogêneo e isotrópico, o comprimento de onda eletromagnética é muito menor que o diâmetro de Ω e Ψ, e o transporte obedece a lei de conservação de energia.

A distância entre o hiperplano α e o primeiro refletor é dada por $z(x)$ para $x \in \bar{\Omega}$, e portanto, o primeiro refletor é definido pelo gráfico de z. O mapa que transporta os sinais de Ω para Ψ_α, projeção de Ψ no plano α, é denotado por P_α.

Problema 1. *Dados dois domínios Ω e Ψ_α no hiperplano α, e duas funções integráveis não-negativas I em Ω e L em Ψ_α que satisfazem*

$$\int_\Omega L(P_\alpha(x))|\det \nabla P_\alpha(x)|dx = \int_\Omega I(x)dx, \tag{1}$$

queremos encontrar uma função $z \in C^2(\bar{\Omega})$, tal que

$$\begin{aligned} P_\alpha : \bar{\Omega} &\longrightarrow \bar{\Psi}_\alpha \\ x &\longmapsto x + \beta \nabla z \end{aligned} \tag{2}$$

[1] raulribeiro@ime.unicamp.br
[2] matheus.santos@ufrgs.br

seja um difeomorfismo.

A partir da obtenção de z que satisfaça o Problema 1, podemos encontrar uma função $\omega(p)$ para $p \in \bar{\Psi}_\alpha$, onde o gráfico de ω é a posição do segundo refletor.

Uma solução fraca para o problema de obter a posição do primeiro refletor está enunciada na Definição 1.1.

Definição 1.1. *Sejam I e L funções integráveis não-negativas. Um par de funções (z, ω) é chamado de solução fraca para o Problema 1, se o mapa $\tilde{P}_\alpha : \bar{\Omega} \longrightarrow \bar{\Psi}_\alpha$, sendo $\tilde{P}_\alpha = \{x + \beta\nabla z(x)\}$ quase todo ponto, é sobrejetivo e para qualquer conjunto de Borel $\tau \subseteq \bar{\Psi}_\alpha$*

$$\int_\tau L(p)dp = \int_{\tilde{P}_\alpha^{-1}(\tau)} I(x)dx, \tag{3}$$

onde dx e dp representam a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.

2 Existência e Unicidade da Solução Fraca

Uma forma de obter a existência e unicidade da solução fraca (Definição 1.1) é relacionando o Problema 1 com problemas de transporte ótimo de massa. Para isso é necessário definir um problema de minimização de um funcional com custo quadrático em $\mathbb{R}^n$ (Problema 2). Esse problema tem o formato de Monge e, pelo Teorema de Brenier, existe uma aplicação de transporte ótima e essa aplicação é única [2].

Problema 2. *Minimizar o funcional com custo quadrático*

$$C(P_\alpha) = \frac{1}{2}\int_\Omega |x - P_\alpha(x)|^2 I(x)dx, \tag{4}$$

para aplicações de transporte $P_\alpha : \Omega \longrightarrow \Psi_\alpha$ que satisfazem

$$\int_\Omega h(P_\alpha(x))I(x)dx = \int_{\Psi_\alpha} h(p)L(p)dp, \quad \forall h : \Psi_\alpha \longrightarrow \mathbb{R} \text{ contínua.} \tag{5}$$

O mapa $\tilde{P}_\alpha : \bar{\Omega} \longrightarrow \bar{\Psi}_\alpha$ satisfaz a condição (5), resta mostrar que esse mapa minimiza (4). Pelo Teorema 2.1, o mapa associado a solução fraca é a aplicação de transporte ótimo, a demonstração desse teorema deve-se a [1].

Teorema 2.1. *Seja (z, ω) uma solução fraca do Problema 1 e seja $\tilde{P}_\alpha$ o mapa correspondente. Então $\tilde{P}_\alpha$ minimiza (4), por conseguinte, $\tilde{P}_\alpha$ é a aplicação de transporte ótimo e é única.*

Referências

[1] T. Glim, and V. Oliker. *Optical design of two-reflector systems, the Monge-Kantorovich mass transfer problem and Fermat's principle.* Indiana University Mathematics Journal, 2004.

[2] C. Villani. *Topics in Optimal Transport.* American Mathematical Soc., 2003.