

Número Cromático do Plano

Pablo Patrick Silva Moraes ¹

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Dr. João Luis Gonçalves ²

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

1 Introdução

Um Grafo Planar Unitário (GPU) é um grafo com as seguintes características: (i) todos os seus vértices são coplanares e (ii) todas as suas arestas possuem o mesmo tamanho.

Em 1950, Edward Nelson [4] apresentou um problema que consiste em descobrir o número de cores necessárias para colorir os vértices de qualquer GPU, sem que dois vértices adjacentes possuam a mesma cor, conhecido como o problema de Hadwiger-Nelson. O número de cores em questão, denotado por $\chi(\mathbb{E}^2)$, é chamado de Número Cromático do Plano.

O GPU apresentado pelos irmãos Leo e William Moser [4], veja a Figura 1, não pode ser colorido com menos de 4 cores, portanto, $\chi(\mathbb{E}^2) \geq 4$.

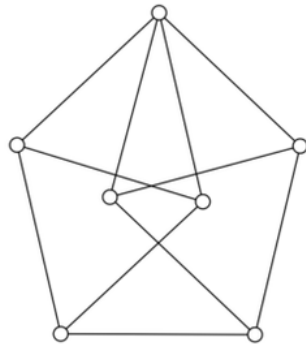


Figura 1: Moser Spindle



Figura 2: Plano ladrilhado de hexágonos

Qualquer GPU no plano ladrilhado por hexágonos regulares de mesmo tamanho, coloridos com um padrão de sete cores, de forma que dois hexágonos de mesma cor estejam a mais de uma unidade de distância e seus diâmetros sejam ligeiramente menores do que uma

¹ppsmoraes@gmail.com

²jlgoncalves@utfpr.edu.br

unidade, como podemos ver na Figura 2, satisfará as condições do problema, portanto, $\chi(\mathbb{E}^2) \leq 7$ [4].

2 Ajuste na Conjectura de Hadwiger-Nelson

A conjectura $4 \leq \chi(\mathbb{E}^2) \leq 7$ se manteve intacta por mais de meio século. Foi somente em 2018 que o biólogo Aubrey D. N. J. de Grey construiu GPUs, o menor deles com 1581 vértices, que não podem ser coloridos com somente 4 cores [2]. Assim, atualizou a conjectura para $5 \leq \chi(\mathbb{E}^2) \leq 7$.

Recentemente, Marijn J. H. Heule [3] utilizou softwares de minimização de sentenças lógicas para redução de GPUs, mantendo o número cromático 5. Como resultado, obteve um GPU com 553 vértices e 2720 arestas com número cromático igual a 5, que é o menor GPU conhecido, com tal característica, até o momento.

3 Conclusões

Nossa pesquisa iniciou com o intuito de destrinchar o trabalho de Grey, de forma que pudéssemos não só compreender, mas também analisar quais os pontos chaves nos GPUs apresentados que os impedem de serem 4-coloráveis, com o objetivo de construir GPUs mais simples, isto é, com um número reduzido de vértices, mas que mantenha a característica de não ser 4-colorável.

Para tal, nos comprometemos com o desenvolvimento de algoritmos que servirão para criação de GPUs e verificação do número cromático. Estamos pesquisando uma forma computacional, dando continuidade ao trabalho de Heule [3], de eliminar vértices e/ou arestas em GPUs cujo número cromático é 5 sem que altere tal propriedade. Além disso, estudamos novas formas de construção de GPUs com número cromático 5, como o apresentado por Geoffrey Exoo e Dan Ismailescu [1].

Referências

- [1] G. Exoo and D. Ismailescu. The chromatic number of the plane is at least 5: a new proof. *arXiv*, 2018. arXiv: 1805.00157 [math.CO].
- [2] A. D. N. J. Grey. The chromatic number of the plane is at least 5. *arXiv*, 2018. arXiv: 1804.02385v3 [math.CO].
- [3] M. J.H. Heule. Computing small unit-distance graphs with chromatic number 5. *arXiv*, 2018. arXiv: 1805.12181 [math.CO].
- [4] A. Soifer. *The Mathematical Coloring Book: Mathematics of Coloring and the Colorful Life of its Creators*. Springer, Nova York, 2009. DOI: 10.1007/978-0-387-74642-5.