Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

---

Modelos de Malthus e Verhulst em sua generalização fracionária

Micaeli Mendola Theodoro [1]
UNESP - Bauru
Rubens de Figueiredo Camargo [2]
UNESP - Bauru

1 Introdução

A modelagem matemática pode ser entendida como um processo realizado a fim de obter uma aproximação matemática de uma situação real. Atualmente, existe modelagem matemática nas mais diversas áreas como engenharia, física, biologia, química dentre tantas outras. As dificuldades para se obter uma boa descrição para a realidade são enormes, nas palavras de Albert Einstein, *"Toda a nossa ciência comparada com a realidade, é primitiva e infantil - e, no entanto, é a coisa mais preciosa que temos."*

E é exatamente disso que tratamos em modelagem, tomamos algumas considerações iniciais sobre o problema e conforme formos fazendo mais adendos, mais próximo da realidade nossa representação estará, porém apesar de toda a nossa ciência e de modelos cada vez mais refinados, estamos longe de representar fielmente a realidade.

Vamos analisar os fenômenos a partir da relação destes com suas taxas de variação, derivadas de ordem inteira, na investida de generalizar os modelos de Malthus e Verhulst de ordem inteira para a ordem fracionária, que é objeto de nossos estudos.

O modelo de Malthus(1798) é de suma importância para todos os estudos subsequentes acerca de modelagem de dinâmicas populacionais . O economista inglês foi o primeiro a tratar do crescimento populacional, fazendo algumas considerações básicas, o alimento é necessário à subsistência do ser humano e o sexo na espécie é uma constante permanente, sendo assim ele supôs que a capacidade de reprodução do ser humano é superior da produção de alimento. Desta forma, a população cresce proporcionalmente a ela mesma. Temos assim na equação (1) o Modelo de Malthus de ordem inteira [1].

$$\frac{d\,P(t)}{dt} = k\,P(t) \tag{1}$$

A equação logística foi proposta por Verhulst(1838) avaliando as estatísticas populacionais fazendo um aperfeiçoamento no modelo de Malthus, podendo ser aplicada em outras

[1] micaelitheodoro@gmail.com
[2] rubens.camargo@unesp.br

 © 2020 SBMAC

áreas como a proliferação do HIV, pois leva em consideração fatores que possam diminuir a proliferação do vírus na população. A equação de Verhulst de ordem inteira é dada por

$$\frac{d\,y(t)}{dt} = k\,y(t)(1 - y(t)) \tag{2}$$

O Cálculo Fracionário remonta do século XVII numa troca de correpondência entre L'Hôpital e Leibniz sobre como calcularíamos a derivada de ordem fracionária e desde então grandes matemáticos deixaram suas contribuições e atualmente é considerado um tema "quente"por conta das diversas aplicações e por ter revelado um potencial para gerar resultados mais próximos da realidade do que o cálculo clássico. Utilizaremos nos modelos a derivada fracionária de Caputo ao invés da derivada de Riemann-Liouville, pois faremos a resolução pelo método das transformadas integrais. Ao calcularmos a Tranformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville geramos um resultado dependente do operador integro-diferencial de ordem não inteira da função, no qual, não possui uma interpretação trivial, já a Transformada de Laplace da derivada de Caputo depende de derivadas de ordem inteira de $f(0)$ [2].

Neste trabalho vamos obter a solução dos Modelos de Malthus e Verhulst, bem como suas generalizações fracionárias e analisar a conveniência de cada um dos quatro modelos.

2 Generalização fracionária

Os operadores integro-diferencial no cálculo fracionário vieram na forma de uma generalização do cálculo de ordem inteira.

No caso da equação de Malthus substituímos a derivada de ordem 1, pela derivada de ordem α, onde $0 < \alpha \leq 1$, então a versão fracionária da equação (1) é dada por (3).

$$\frac{d^\alpha\, m(t)}{dt^\alpha} = k^\alpha\, m(t) \tag{3}$$

Já na equação logística de Verhulst (2), faremos a mudança de variável $z(t) = 1/y(t)$, convertendo-a em uma equação linear. Sendo a equação (4) equivalente a clássica (2) em $z(t)$.

$$\frac{d\,z(t)}{dt} = k(1 - z(t)) \tag{4}$$

Agora substituindo a ordem 1 da derivada por $0 < \alpha \leq 1$, temos a generalização fracionária (5).

$$\frac{d^\alpha\, z(t)}{dt^\alpha} = k^\alpha(1 - z(t)) \tag{5}$$

Referências

[1] R.C. Bassanezi. Malthus e a evolução de modelos. *Ciência e Natura*, 36:97-100, 2014.

[2] R.F. Camargo, E.C. Oliveira. *Cálculo Fracionário.* Editora: Livraria da Física, São Paulo, 2015.

© 2020 SBMAC