Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Estudo de Cônicas e Formas Quadráticas Utilizando o Software GeoGebra

Igor Michael Araujo de Macedo [1]
Marcos Henrique Fernandes Marcone [2]
Fabiana Tristão de Santana [3]
Escola de Ciências e Tecnologia, UFRN, Natal, RN
Fagner Lemos de Santana [4]
Departamento de Matemática, UFRN, Natal, RN

Neste trabalho o software GeoGebra foi usado no estudo de equações quadráticas do tipo $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + k = 0$, com $b \neq 0$, cujos gráficos são seções cônicas, através da diagonalização ortogonal de matrizes simétricas.

O software GeoGebra é um software matemático livre com linguagem acessível. Seus recursos possibilitam melhor compreensão e visualização de teorias, muitas vezes vistas apenas em sala de aula. Suas interfaces trazem muitas contribuições para o ensino de um modo geral [2]. O desenvolvimento deste trabalho será feito na Janela CAS, que é um ambiente simples de programação que exige poucos pré-requisitos, estimula a compreensão dos padrões matemáticos e desenvolve o raciocínio lógico. Por fim, a Janela de Visualização permitirá a representação gráfica de todo o desenvolvimento do trabalhado.

A equação $ax_1^2+2bx_1x_2+cx_2^2+k=0$, pode ser escrita na forma $\vec{v}^T A\vec{v}+k=0$, em que as coordenadas do vetor coluna $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ são as variáveis x_1 e x_2, k é o termo independente e A é a matriz 2×2 de termos $a_{11} = a$, $a_{22} = c$, $a_{12} = a_{21} = b$. Como A é simétrica e, portanto, ortogonalmente diagonalizável e $b \neq 0$, A possui dois autovalores reais λ_1 e λ_2 distintos e autovetores ortonormais $\vec{u_1}$ e $\vec{u_2}$ os quais definem a matriz ortogonal P usada na mudança de variáveis $\vec{v} = P\vec{v'}$, onde $\vec{v'} \in \mathbb{R}^2$ é um vetor coluna com novas coordenadas y_1 e y_2. Como $P^TAP = D$ e D é a matriz diagonal de autovalores de A, dados por λ_1 e λ_2, esta mudança de variáveis fornece a equação $\vec{v'}^T D\vec{v'}+k=0$, cujo gráfico é uma cônica com focos em um dos eixos gerados por u_1 e u_2 e vértices definidos em função de λ_1 e λ_2 [1].

O desenvolvimento deste método na Janela CAS do GeoGebra, para a equação $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + k = 0$, é iniciado definindo os coeficientes $a := a_0, b := b_0, c := c_0$, o termo constante $k := k_0$, a matriz $A := \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ e a matriz identidade $I := Identidade(2)$. Em seguida, a equação característica é definida por $Determinante(\lambda *$

[1]igor_parelhas@hotmail.com
[2]marcosmarcone48@gmail.com
[3]fabianasantana@ect.ufrn.br
[4]fagner@ccet.ufrn.br

$I - A)$ e solucionada por $Soluções(\$7 = 0, \lambda)$, onde utiliza-se o comando $\$N$ para representar o conteúdo da célula de número N. Em seguida, o comando $Elemento$, que especifica elementos de listas, é usado para definir nas próximas células as raizes $\lambda 1 := Elemento(\$8, 1)$ e $\lambda 2 := Elemento(\$8, 2)$. Com isso, o vetor genérico $v := Vetor(x, y)$ é definido e a equação $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ é resolvida, primeiramente para $\lambda 1$, por $Soluções(Av = \lambda 1 v, \{x_1, x_2\})$. A solução fica em função da variável x_2 e na célula 13 a Janela Substituir é usada para atribuir o valor 1 a esta variável. Com isso, define-se o autovetor $v1 := (Elemento(\$13, 1, 1), Elemento(\$13, 1, 2))$associado a $\lambda 1$. Analogamente para $\lambda 2$, define-se $v2 := (Elemento(\$16, 1, 1), Elemento(\$16, 1, 2))$.

O conjunto $\{e1, e2\}$ é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$, definida por $e1 := VetorUnitário(v1)$ e $e2 := VetorUnitário(v2)$, que definem os novos eixos $r1 := Reta((0, 0), e1)$ e $r2 := Reta((0, 0), e2)$, respectivamente. As coordenadas de $e1$ e $e2$ definem a matriz $P := \{\{Elemento(\$18, 1), Elemento(\$19, 1)\}, \{Elemento(\$18, 2), Elemento(\$19, 2)\}\}$ que, juntamente com $v' := \{\{y1\}, \{y2\}\}$, definirão a mudança de variáveis $v = Pv'$. Logo, $v^T Av - k = 0$ é equivalente à equação reduzida $MatrizTransposta(P * v') * A * P * v' + k * MatrizIdentidade(1) = 0 * MatrizIdentidade(1)$. Considerando $a_0 = 5, b_0 = -2, c_0 = 8$ e $k = -36$, corresponde à elipse de equação $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 36 = 0$, o método descrito retornará a equação reduzida $4y_1^2 + 9y_2^2 - 36 = 0$, como mostra a Figura 1.

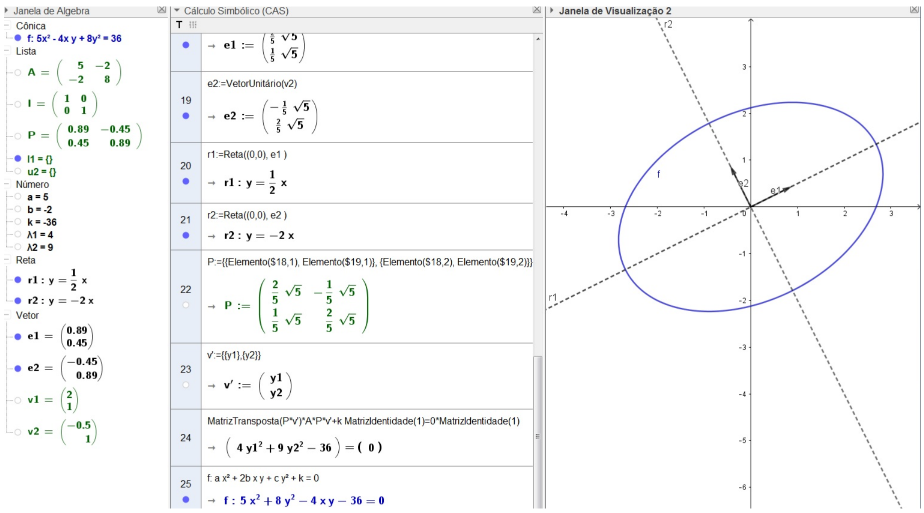

Figura 1: Desenvolvimento do método de diagonalização de formas quadráticas no GeoGebra.

Referências

[1] H. Anton, C. Rorres. *Álgebra linear com aplicações*. 8. ed. Bookman, Porto Alegre, 2001.

[2] M. Hohenwarter, J. Hohenwarter. Ajuda GeoGebra: manual oficial da versão 3.2. Disponível em: <https://app.geogebra.org/help/docupt_PT.pdf>. Acesso em: 03 fev. 2017.