Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Uma Análise de Reticulados Bem-Arredondados em $\mathbb{R}^2$ via Polinômios

William Lima da Silva Pinto [1]
Matemática, UNESP, Rio Claro, SP
Carina Alves [2]
Departamento de Matemática, UNESP, Rio Claro, SP

1 Introdução

Boa parte dos problemas na teoria dos códigos está relacionada à propriedades de reticulados. Um conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ é um reticulado de posto m se existem vetores linearmente independentes $v_1, \cdots, v_m \in \mathbb{R}^n$, $m \leq n$, tais que qualquer elemento $x \in \Lambda$ pode ser expresso como $x = \sum_{i=1}^{m} x_i v_i$, $x_i \in \mathbb{Z}$. Por motivos de aplicação, o interesse de estudo é maior quando $m = n$. Nesse caso, dizemos que Λ é de posto completo.

Diferentes aplicações requerem reticulados com diferentes propriedades. Entre elas, estão a alta densidade de centro e o bem-arredondamento. Esta última tem sido objeto estudo recente, como em [3, 4] e está relacionado com o problema do número de contato. Formalmente, definindo $|\Lambda| = min\{\|x\| : x \in \Lambda, x \neq 0\}$, a densidade de centro de um reticulado Λ é dada por

$$\delta(\Lambda) = \frac{(|\Lambda|^2/2)^n}{|det(M)|}, \tag{1}$$

onde M é a matriz cujos elementos de suas linhas são as coordenadas dos vetores da base de Λ, chamada de matriz geradora de Λ. Por outro lado, Λ é bem arredondado se o conjunto $S(\Lambda) = \{x \in \Lambda : \|x\|^2 = |\Lambda|\}$ gera $\mathbb{R}^n$.

Reticulados bem-arredondados cumprem um importante papel em problemas de otimização discreta, [2,5]. Em [3,4], os autores investigaram a relação entre reticulados bem-arredondados e os conhecidos, reticulados obtidos via o homomorfismo canônico, com foco especial em $\mathbb{R}^2$. Neste trabalho, investigamos em que condições reticulados gerados via polinômios estudados em [1], são bem-arredondados em $\mathbb{R}^2$. Neste sentido, conseguimos também uma condição para os coeficientes de um polinômio de grau 2 de modo a obter reticulados com a maior densidade de centro em $\mathbb{R}^2$.

[1]williamlima.unesp.rc@gmail.com
[2]carina.alves@unesp.br

2 Reticulados Bem-Arredondados em $\mathbb{R}^2$ via Polinômios

É bastante convencional o uso do homomorfismo canônico para gerar reticulados em $\mathbb{R}^2$. Para tal, dado um corpo de números K, aplicamos em uma base integral de K o $\mathbb{Q}$-homomorfismo $\sigma : K \to \mathbb{R}^n$ definido por

$$\sigma(x) = (\sigma_1(x), \cdots, \sigma_{r_1}(x), \Re\sigma_{r_1+1}(x), \Im\sigma_{r_1+1}(x), \cdots, \Re\sigma_{r_1+r_2}(x), \Im\sigma_{r_1+r_2}(x)), \quad (2)$$

onde $\Re(x)$ e $\Im(x)$ representam as partes real e imaginária de x, respectivamente. Os monomorfismos $\sigma_j(K) \subset \mathbb{R}$, para $j = 1, \cdots, r_1$ e $\sigma_{r_1+r_2+j} = \overline{\sigma_{r_1+j}}$, para $j = 1, \cdots, r_2$.

A relação entre reticulados obtidos via homomorfismo canônico e reticulados bem-arredondados em $\mathbb{R}^2$ foi consistentemente apresentada em [3, 4]. No presente trabalho, investigamos a relação entre reticulados obtidos via polinômios e reticulados bem-arredondados.

Seja $f(x) = x^2 + ax + b$, em que $a, b \in \mathbb{Z}$, um polinômio com raízes reais distintas α e β. Definimos por Λ_f o reticulado gerado pela base $\{(\alpha, \beta), (\beta, \alpha)\}$. Se $x = x_1(\alpha, \beta) + x_2(\beta, \alpha)$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, então $\|x\|^2 = (a^2 - 2b)(x_1^2 + x_2^2) + 4b(x_1 x_2)$. O objetivo é identificar quando $|S(\Lambda_f)| \geq 4$, situação em que Λ_f é bem arredondado.

Quando $a^2 = -2b$ ou $a^2 = 6b$, obtivemos que $|S(\Lambda_f)| = 6$, neste caso, verificamos que Λ_f tem a melhor densidade de centro possível para a dimensão 2.

Quando f tem raízes complexas conjugadas $\alpha \pm i\beta$, definimos Λ_f como sendo o reticulado gerado pela base $\{(\alpha, \beta), (\alpha, -\beta)\}$. A investigação é análoga e neste caso, obtivemos que Λ_f tem a melhor densidade de centro para a dimensão 2 se, e somente se, $a^2 = -b$ (se $b < 0$) ou $a^2 = 3b$ (se $b \geq 0$).

Agradecimentos

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 2018/12702-3 pelo apoio financeiro e a minha orientadora, Profa. Dra. Carina Alves, pela ajuda e incentivo.

Referências

[1] C. Alves, C. W. O. Benedito e W.L.S. Pinto. Reticulados via polinômios de grau 2 e 3. *Revista Eletrônica Paulista de Matemática*, 10: 39-52, 2017.

[2] J.H. Conway and N.J.A. Sloane, *Sphere Packings, Lattices and Groups, 3a. edition.* Springer-Verlag, New York, 1999.

[3] L. Fukshansky, G. Henshaw, P. Lao, M. Prince, X. Sun and S. Whitehead. On well-rounded ideal lattices - II, *International Journal of Number Theory*, 9:139-154, 2019.

[4] L. Fukshansky and K. Petersen. On Well-Rounded Ideal Lattices. *Journal of Number Theory*, 8 (1): 189–206, 2012.

[5] J. Martinet, *Perfect Lattices in Euclidean Spaces*, Springer-Verlag, 2003.