**Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**

# Conexões entre problemas de cupons e rumores estocásticos

Adalto Speroto[1]
Programa Interinstitucional de Pós-Graduação em Estatística, USP/UFSCar, São Carlos, SP
Pablo Martin Rodriguez[2]
Departamento de Estatística, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, UFPE, Recife, PE

## 1 Introdução

Um problema bem conhecido da Teoria das Probabilidades é o chamado Problema do Colecionador de Cupons. Este problema pode ser formulado da seguinte forma: dado que existem $n+1$ tipos diferentes de cupons, quantos cupons você espera retirar, com substituição, antes de ter sacado cada tipo de cupom pelo menos uma vez? Desta maneira, a variável aleatória de interesse é o número de cupons que devem ser sacados até obter toda a coleção de cupons. A história do problema do colecionador de cupons começou em 1708, quando o problema apareceu pela primeira vez na obra de A. De Moivre intitulada por *On measurement of change*. Desde então existe um número muito grande de trabalhos estudando tanto quantidades de interesse relacionadas com o problema quanto diversas aplicações.

## 2 Sobre cupons e rumores

Neste trabalho, iremos considerar outra variável aleatória que surge deste problema. É a variável que conta o número de cupons colecionados por uma pessoa até que ocorra o primeiro tipo de cupom repetido. Até onde sabemos esta variável aleatória não tem sido estudada na literatura no contexto deste problema. Denotando a variável aleatória por $N$ podemos encontrar sua distribuição de probabilidades

**Proposição 2.1.**

$$\mathbb{P}\left(N=j\right) = j!\binom{n+1}{j}\frac{1}{(n+1)^j}\frac{j}{n+1}, \tag{1}$$

*para* $j \in \{1,2,3\ldots,n+1\}$.

Agora nosso intuito de explorar a aplicação desta distribuição no contexto de modelos de rumores em grafos. Para isto tomamos como base o modelo de Maki-Thompson, o qual foi proposto em [6] como uma simplificação do modelo de rumores de Daley-Kendall

[1] speroto@usp.br
[2] pablo@de.ufpe.br

(ver [4]). Nestes modelos se assume que uma população está subdividida em três classes de indivíduos: ignorantes, propagadores e contidos. O primer grupo representa indivíduos que não sabem do rumor, o segundo são pessoas que sabem e o transmitem para outros indivíduos e o terceiro grupo é formado por pessoas que sabem do rumor mas pararam de transmit-lo. O modelo pode ser formulado como uma cadeia de Markov a tempo continuo que descreve a evolução das quantidades de pessoas em cada categoria. Sugerimos ao leitor [5] para uma definição formal do modelo e uma revisão sobre alguns dos primeiros resultados em modelos de rumores. Grosso modo, este é um modelo de tipo epidêmico.

A conexão entre cupons e rumores aparece quando observamos que a variável $N$ pode ser interpretada como o número de pessoas informadas por um propagador no modelo de rumor de Maki-Thompson. Esta conexão, junto com uma comparação adequada com processos de ramificação, nos permite obter resultados do modelo de Maki-Thompson quando definido em grafos infinitos; em particular, nas árvores homogêneas infinitas. Com isto, nosso trabalho se soma às generalizações obtidas recentemente em [1, 3]. Um dos resultados chave para usar nossa comparação com processos de ramificação é a seguinte propriedade, onde $\mathbb{E}_n$ denota esperança e $n$ o número de tipos diferentes de cupons.

**Proposição 2.2.** $\mathbb{E}_{n+1}(N) > 2$ *se, e somente se,* $n \geq 2$.

**Observação 2.1.** *Se passassemos a observar o número de cupons colecionados por uma pessoa até que ocorra o segundo tipo de cupom repetido; então teríamos uma generalização da variável $N$, para a qual podemos obter sua distribuição de probabilidades. Por outro lado, esta nova variável aleatória pode ser interpretada como o número de pessoas informadas por um propagador até que ele(a) atinja duas interações inúteis no modelo de Maki-Thompson. Esta variante do modelo foi formulada em [2] e generalizada em [5]. Portanto, estendendo os argumentos usados para conectar $N$ com o modelo de Maki-Thompson, podemos estender o estudo do modelo de [2] para grafos infinitos.*

## Referências


[1] E. Agliari, A. Pachon, P. M. Rodríguez and F. Tavani. Phase transition for the Maki-Thompson rumor model on a small-world network, *J. Stat. Phys.*, 169: 846-875, 2017.

[2] H. Carnal, Calcul des probabilités et modélisation. *Elemente der Mathematik*, 49: 166-173, 1994.

[3] C. F. Coletti, P. M. Rodríguez and R. B. Schinazi. A spatial stochastic model for rumor transmission, *J. Stat. Phys.*, 147: 375-381, 2012.

[4] D.J. Daley and D.G. Kendall. Epidemics and rumors. *Nature*, 204, 1118, 1964.

[5] E. Lebensztayn and F. P. Machado and P. M. Rodríguez. On the behaviour of a rumour process with random stifling, *Environ. Modell. Softw.*, 26: 517-522, 2011.

[6] D.P. Maki and M. Thompson. *Mathematical models and applications, with emphasis on the social, life, and management sciences* . Prentice-Hall, 1973.