Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Constante de Davenport

Adriana Wagner [1]
Curso de Matemática, UFMS/CPAQ, Mato Grosso do Sul, MS
Ludiér Mariano Rosa[2]
Curso de Matemática, UFMS/CPAQ, Mato Grosso do Sul, MS

1 Introdução

Nesse trabalho, tendo como base um grupo G abeliano finito, teremos o propósito de definir a sua constante de Davenport, [1]. A motivação original para estudar a constante de Davenport foi o problema da fatoração não-única nos campos numéricos. Apresentaremos a constante de Davenport para o $\mathbb{Z}_n$ e para um $p-grupo$. Os resultados aqui apresentados fazem parte do estudo do projeto de pesquisa "Teoria de Números e Combinatória" tendo como base [2]. Em todo o texto G denotará um grupo abeliano finito.

2 Constante de Davenport

Definição 2.1. *Seja* $S = (a_i)_{i=1}^k$ *uma sequência de* G *aditivo, denotaremos o número de elementos de* S *por* $|S|$*, ou seja,* $|S| = k$*. O número de ocorrências do elemento a em* S *por* $v_a(S)$ *e a soma de* S *por* $\sigma(S) = \sum_{i=1}^k a_i$*.*

Definição 2.2. *Considere* $S = (a_i)_{i=1}^k$ *uma sequência de* G*. Considere* $I, J \subset \{1, 2, \cdots, k\}$ *tais que* $T_1 = (a_i)_{i \in I}$ *e* $T_2 = (a_j)_{j \in J}$ *são subsequências de* S*. Podemos definir as operações:*

$$(i)\ ST_1^{-1} = (a_t)_{t \in \{1,\cdots,k\}-I} \qquad (ii)\ T_1T_2 = (a_t)_{t \in I \cup J}.$$

Exemplo 2.1. *Considere* $S = (\bar{2}, \bar{2}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{2})$ *uma sequência de* $\mathbb{Z}_6$*, então* $|S| = 10$*,* $v_{\bar{2}}(S) = 5$ *e* $\sigma(S) = \bar{0}$*. Tomando* $I = \{1, 2, 4, 5\}$*,* $J = \{4, 6, 7, 8\}$ *e considerando as subsequências* $T_1 = (a_i)_{i \in I}$ *e* $T_2 = (a_j)_{j \in J}$ *temos que* $ST_1^{-1} = (\bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{2})$ *e* $T_1T_2 = (\bar{2}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{1}, \bar{2})$*.*

Definição 2.3. *Dada* S *uma sequência de* G *aditivo, diremos que* S *é uma sequência soma-zero se a soma de* S *é igual ao elemento neutro de* G*.*

Definição 2.4. *O menor inteiro positivo* t *tal que toda sequência* S *de* G*, com* $|S| \geq t$*, possua uma subsequência soma-zero é definido como a Constante de Davenport, denotada por* $D(G)$*.*

Na proposição abaixo calcularemos a constante de Davenport para $\mathbb{Z}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Proposição 2.1. *Considere* $n \in \mathbb{N}$ *e o grupo aditivo* $\mathbb{Z}_n$*. Então* $D(\mathbb{Z}_n) = n$*.*

Demonstração: Pela Proposição 4.6, em [2], temos que $D(\mathbb{Z}_n) \leq n$. Agora, considere a sequência S de comprimento $n-1$ em $\mathbb{Z}_n$, onde $\bar{1}$ aparece $n-1$ vezes. Vemos que S não possui subsequência soma-zero, logo $D(\mathbb{Z}_n) \geq n$. Portanto, $D(\mathbb{Z}_n) = n$. $\square$

[1] adriana.wagner@ufms.br
[2] ludier_mariano@hotmail.com

3 Constante de Davenport para p-Grupo

Considerando G um grupo multiplicativo, podemos adaptar as definições apresentadas.

Definição 3.1. *Seja* $S = (a_i)_{i=1}^k$ *uma sequência de* G *multiplicativo, denotaremos o número de elementos de* S *por* $|S|$*, ou seja,* $|S| = k$*. O número de ocorrências do elemento* a *em* S *por* $v_a(S)$ *e o produto de* S *por* $\sigma(S) = \prod_{i=1}^k a_i$*.*

Definição 3.2. *Dada* S *uma sequência de* G *multiplicativo, diremos que* S *é uma sequência produto-um se o produto de* S *é igual ao elemento identidade de* G*.*

Apresentaremos a $D(G)$, sendo G um p-grupo, mas antes necessitamos de algumas definições.

Definição 3.3. *Considere* G *multiplicativo e* $\mathbb{Z}$ *o anel dos inteiros. Definimos o conjunto* $(\mathbb{Z}(G), \oplus, \odot)$ *formado pelas* $\sum_{g\in G} r_g(g)$*, com* $r_g \in \mathbb{Z}$ *e* $r_g \neq 0$*, com as operações*
(i) $\displaystyle\sum_{g\in G} r_g(g) \oplus \sum_{g\in G} s_g(g) = \sum_{g\in G}(r_g(g)+s_g(g))$*;* *(ii)* $\displaystyle\sum_{g\in G} r_g(g) \odot \sum_{g\in G} s_h(h) = \sum_{g,h\in G} r_g s_h(g\cdot h)$*.*

As provas das proposições e do teorema enunciados abaixo, são encontradas em [2].

Proposição 3.1. *Considere* p *primo e* G *o* p*-grupo* $\mathbb{Z}_{p^{e_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{e_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{e_r}}$*, com* $r, e_i \in \mathbb{N}$ *e* $\mathbb{Z}_{p^{e_i}}$ *isomorfo a um subgrupo de* G*. Dada* $S = (a_i)_{i=1}^k$ *uma sequência de* G*, com* $k \geq 1 + \sum_{i=1}^r (p^{e_i} - 1)$ *temos*

$$(1 - a_1)(1 - a_2)\cdots(1 - a_k) \equiv 0 \ (mod\ p). \tag{1}$$

Definição 3.4. *Dada* $S = (a_i)_{i=1}^k$ *uma sequência do* p*-grupo* G*. Definamos*

$$P_g(S) = \left|\left\{J \subset \{1, \cdots, k\}|\ \prod_{j\in J} a_j = g,\ |J|\ par\right\}\right|; \tag{2}$$

$$I_g(S) = \left|\left\{J \subset \{1, \cdots, k\}|\ \prod_{j\in J} a_j = g,\ |J|\ \acute{\imath}mpar\right\}\right|. \tag{3}$$

Na proposição seguinte estabelecemos uma relação entre todas as sequências de comprimentos pares e ímpares, com produto igual a g.

Proposição 3.2. *Para a sequência* S *temos que*

$$P_g(S) - I_g(S) \equiv \begin{cases} 0\ (mod\ p), & se\ g \neq 1 \\ -1\ (mod\ p), & se\ g = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Agora, vamos exibir a constante de Davenport para um p-grupo.

Teorema 3.1. *Seja* G *um* p*-grupo abeliano finito como na Proposição 3.1. Então,*

$$D(G) = 1 + \sum_{i=1}^r (p^{e_i} - 1). \tag{5}$$

Referências

[1] A. Geroldinger and R. Schineider. On Davenport's Constant, *Journal of Combinatorial Theory.*, 1992. DOI:10.1016/0097-3165(92)90061-X.

[2] A. Wagner, Representações Aditivas em Grupos Abelianos Finitos, Dissertação de Mestrado em Matemática, UEM, 2008.