Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Definição e algumas propriedades da Integral de Wiener

Roberta Agnes Mendes Melo [1]
Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal-UFU
Evaneide Alves Carneiro[2]
Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal-UFU

1 Introdução

Neste trabalho abordaremos a definição da Integral de Riemann-Stieljes e a partir dela levantaremos a seguinte questão: "É possível definir a integral com respeito ao Movimento Browniano usando sua definição?". O objetivo é mostrar que é possível generalizar a Integral de Riemann-Stieljes e a partir dela definir a integral de Wiener.

2 Definições e Teoremas

2.1 A Integral de Riemann-Stieljes

Definição 2.1. *Seja g uma função monótona crescente em $I = [a, b]$ e f limitada em I. Dizemos que f é Riemann-Stieljes integrável com respeito a g se o limite abaixo existe:*

$$\int_a^b f(t)dg(t) = \lim_{\|\Delta_n\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})), \tag{1}$$

onde $\Delta_n = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ é uma partição de I, $\|\Delta_n\| = \max_{1\le i\le n}(t_i - t_{i-1})$ e $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Suponhamos agora que a função f é monótona crescente e contínua e g é contínua. Então, usando a fórmula de integração por partes, podemos definir a Integral de Riemann-Stieljes de f com respeito a g por:

$$\int_a^b f(t)dg(t) = f(t)g(t)\big|_a^b - \int_a^b g(t)df(t), \tag{2}$$

onde a integral do lado direito é definida pela equação (1) trocando os papéis de f e g.

Agora temos a seguinte questão: "Será que podemos definir a integral com respeito ao Movimento Browniano usando a definição acima?"

[1]roberta.melo@ufu.br
[2]eva.ac@ufu.br

2.2 A Integral de Wiener

Queremos a seguir definir a Integral $\int_a^b f(t)dB(t,w)$, onde f é uma função determinística (isto é, não depende de w) e $B(t,w)$ é um Movimento Browniano. Suponha que para cada $w \in \Omega$ usemos a equação (2) para definir:

$$(RS)\int_a^b f(t)dB(t,w) = f(t)B(t,w)\big|_a^b - \int_a^b B(t,w)df(t). \tag{3}$$

Então a classe de funções $f(t)$ para as quais a integral $(RS)\int_a^b f(t)dB(t,w)$ é definida é bastante restrita, ou seja, $f(t)$ precisa ser uma função contínua de variação limitada. Precisamos de uma ideia diferente para definir a integral $\int_a^b f(t)dB(t,w)$ para uma classe mais ampla de funções $f(t)$. Esta nova integral, chamada de Integral de Wiener de f, é definida para todas as funções $f \in L^2[a,b]$. A definição segue duas etapas.

Etapa 1: Seja f uma função escada dada por $f = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{[t_{n-1},ti)}$, onde $t_0 = a$ e $t_n = b$. Neste caso, definimos:

$$I(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i(B(t_i) - B(t_{i-1})).$$

Etapa 2: Seja $f \in L^2[a,b]$. Escolhamos uma sequência $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de funções escada tal que $f_n \to f$ em $L^2[a,b]$. Então $\{I(f_n)\}_{n=1^\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2[a,b]$, logo converge. Usamos esse fato para definir:

$$I(f) = \lim_{n\to\infty} I(f_n) \text{ em } L^2[a,b]. \tag{4}$$

Definição 2.2. *Seja $f \in L^2[a,b]$. O limite $I(f)$ definido na Equação (3) é chamado a integral Wiener de f. A Integral de Wiener $I(f)$ de f será denotada por*

$$I(f)(w) = \left(\int_a^b f(t)dB(t)\right)(w), w \in \Omega$$

Teorema 2.1. *Para cada $f \in L^2[a,b]$, a Integral de Wiener $\int_a^b f(t)dB(t)$ é uma variável aleatória gaussiana com média 0 e variância $||f||^2 = \int_a^b f(t)^2 dt$.*

Teorema 2.2. *Seja f uma função contínua de variação limitada. Então, para quase todo $w \in \Omega$, temos:*

$$\int_a^b f(t)dB(t)(w) = (RS)\int_a^b f(t)dB(t,w), \tag{5}$$

onde o lado esquerdo é a Integral de Wiener de f e o lado direito é a integral de Riemann-Stieltjes de f definida pela Equação (3).

Referências

[1] H. H. Kuo. *Introduction to Stochastic Integration, 1a. edição.* Springer, San Francisco, 2006.