Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Árvores Geradoras e Grafos Matrogênicos

Robson Carlos de Moura Junior[1]
Francisca Andrea Macedo França[2]
Andre Ebling Brondani[3]
Instituto de Ciências Exatas, UFF, Volta Redonda, RJ

1 Introdução

O Teorema da matriz-árvore é um dos teoremas clássicos da Teoria Algébrica de Grafos. Este provê um método de contagem das árvores geradoras de um grafo conexo em termos dos autovalores ou determinantes de matrizes associadas a tais grafos. O Teorema foi provado pela primeira vez, em 1847, pelo físico alemão Gustav Kirchhoff em seu estudo sobre redes elétricas [5]. Várias provas diferentes, generalizações e também algumas aplicações são conhecidas. Por exemplo, Arthur Cayley – um matemático britânico, tentou contar o número de hidrocarbonetos saturados C_nH_{2n+2} contendo um determinado número de átomos de carbono. Em 1889, o mesmo autor, em [2], provou que o número de árvores geradoras de um grafo completo K_n é dado por n^{n-2}.

Teorema 1.1 (Teorema da matriz-árvore)**.** *O número de árvores geradoras de um grafo G é igual a qualquer cofator da matriz laplaciana de G.*

Como consequência do teorema, também podemos determinar a quantidade de árvores geradoras de um grafo através do espectro laplaciano, como podemos observar no seguinte corolário.

Corolário 1.2. *Se $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ são os autovalores não nulos da matriz laplaciana L do grafo conexo G de ordem n então*

$$\tau(G) = \frac{\mu_1\mu_2 \cdots \mu_{n-1}}{n},$$

onde $\tau(G)$ é o número de árvores geradoras de G.

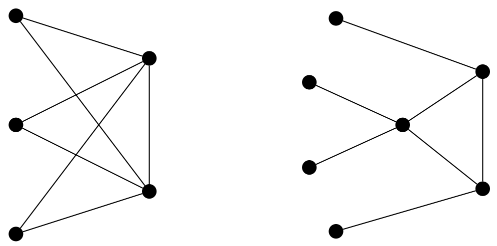
[1] robinhobfr@gmail.com
[2] francisca_franca@id.uff.br
[3] andrebrondani@id.uff.br

© 2020 SBMAC

2 Grafos Matrogênicos

Se u e v são vértices do grafo G, dizemos que u *domina* v se $N_G(v)-\{u\} \subseteq N_G(u)-\{v\}$, onde $N_G(w)$ representa a vizinhança do vértice w. Quando nem u domina v e nem v domina u então u e v são chamados de *incomparáveis*.

Um grafo G é *matrogênico* se para quaisquer vértices u e v, incomparáveis em G, tem-se que a cardinalidade da diferença simétrica entre os conjuntos $N_G(v) - \{u\}$ e $N_G(u) - \{v\}$ é 2. Dentre os grafos matrogênicos podemos citar o grafo completo e os grafos thresholds. Na figura a seguir, apresentamos exemplos de grafos matrogênico e não matrogênico.



G_1 G_2

Figura 1: G_1 é matrogênico e G_2 não é matrogênico.

Atualmente, existem diversos trabalhos na literatura que objetivam analisar a quantidade de árvores geradoras de certas famílias de grafos, veja [4], [3] e [1]. Neste trabalho, apresentamos um estudo da quantidade de árvores geradoras em algumas subclasses de grafos matrogênicos utilizando os métodos citados no Teorema 1.1 e no Corolário 1.2, destacando suas vantagens e desvantagens.

Referências

[1] P. Biane and G. Chapuy. Laplacian matrices and spanning trees of tree graphs. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques., Université Paul Sabatier Cellule Mathdoc*, 26:235–261, 2017.

[2] A. Cayley. A Theorem on Trees, *Quart. J. Math.*, 23:376–378, 1889.

[3] D. Chestnut and D. E. Fishkind. Counting spanning trees of threshold graphs. http://arxiv.org/abs/1208.4125, 2012.

[4] A. M. Duval, C. J. Klivans and J. L. Martin. Simplicial Matrix-Tree Theorems, *Transactions of the American Mathematical Society*, 361:6073–6114, 2009.

[5] G. Kirchhoff. Über der Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird, *Ann. Phys. Chem.*, 72:497–508, 1847.

© 2020 SBMAC