Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Polinômios Ortogonais de Freud e as Equações de Painlevé

Karina Seviero Rampazzi[1]
Pós-Graduação em Matemática, UNESP - Campus de São José do Rio Preto - SP
Cleonice Fátima Bracciali[2]
Depto de Matemática Aplicada, UNESP - Campus de São José do Rio Preto - SP

1 Introdução

Como mencionado em [2], as equações diferenciais lineares são, razoavelmente, fáceis de serem estudadas. As equações diferenciais não lineares são mais difíceis e podem conter vários problemas adicionais. Um desses problemas é que as singularidades da solução dependem das condições iniciais. Tais singularidades são chamadas de singularidades móveis. Outro problema é o comportamento da solução na vizinhança de uma singularidade que pode ser classificado como: pólo, singularidade essencial ou ponto de ramificação. No final do século XIX, estudiosos como Poincaré, Fuchs, Picard e Painlevé interessaram-se em encontrar equações diferenciais não lineares para as quais a solução geral é livre de pontos de ramificação móveis. Esse fato é chamado de propriedade de Painlevé. No início do século XX, Paul Painlevé descobriu que existem 50 equações diferenciais na forma canônica que satisfazem tal propriedade. Dessas 50, existem apenas seis que não podem ser reduzidas a equações lineares cujas soluções já são conhecidas. Essas equações ficaram conhecidas como equações de Painlevé. A primeira delas é $\mathrm{P_I}: \quad y'' = 6y^2 + x$.

As equações discretas de Painlevé surgiram mais recentemente. Elas são equações discretas não lineares (relações de recorrência) para as quais o limite contínuo é uma das equações diferenciais de Painlevé. Neste trabalho consideramos apenas a primeira equação discreta de Painlevé, dada por

$$\mathrm{dP_I}: \qquad x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = \frac{\alpha n + \beta + (-1)^n a}{x_n} + b, \tag{1}$$

onde α, β, a e b são constantes.

Os polinômios de Freud $\{p_n\}_{n\geq 0}$ são ortogonais com respeito à função peso w, em $(-\infty,\infty)$, dada por $w(x) = |x|^{\rho} exp(-|x|^s), \ \rho > -1, \ s > 0$, ou seja, para $m, n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_m(x)p_n(x)w(x) = 0, \qquad m \neq n.$$

[1]karinarampazzi@hotmail.com
[2]cleonice.bracciali@unesp.br

 © 2020 SBMAC

2 Polinômios de Freud e a equação discreta de Painlevé $\mathrm{dP_I}$

Os polinômios ortogonais clássicos são polinômios ortogonais com relação a uma função peso w, sobre a reta real, que satisfaz a equação diferencial de primeira ordem

$$(\sigma w)' = \tau w, \tag{2}$$

onde σ é um polinômio de grau ≤ 2 e τ um polinômio de grau 1. Essa equação é chamada de equação de Pearson. Ver Chihara [1].

Consideremos a função peso de Freud especial, dada por

$$w(x) = e^{-x^4+tx^2}, \qquad x \in (-\infty, \infty), \tag{3}$$

onde $t \in \mathbb{R}$ é um parâmetro. Essa função peso também satisfaz a equação de Pearson (2), porém os polinômios são $\sigma(x) = 1$ e $\tau(x) = -4x^3 + 2tx$. Os polinômios de Freud (ortogonais com relação a função peso (3)) satisfazem a relação de recorrência

$$xp_n(x) = a_{n+1}p_{n+1}(x) + a_n p_{n-1}(x), \tag{4}$$

onde os coeficientes a_n dependem do parâmetro t.

Neste trabalho discutimos alguns resultados, apresentados em [2], que relacionam os polinômios de Freud com a equação discreta de Painlevé I (1), onde $x_n = a_n^2$, $a = 0$, $b = t/2$, $\alpha = 1/4$ e $\beta = 0$, ou seja, com

$$a_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n-1}^2 - \frac{t}{2} = \frac{n}{4a_n^2}.$$

Outro resultado garante a unicidade da solução positiva de $\mathrm{dP_I}$ com $a_0 = 0$.

Apresentamos também um resultado em que os coeficientes da relação de recorrência (4) satisfazem uma equação diferencial de Painlevé na variável t. Para fazer isso, primeiro é necessário encontrar uma equação diferencial e de diferenças para os coeficientes da relação de recorrência dos polinômios de Freud. Tal equação é conhecida por lattice de Langmuir.

Agradecimentos

À CAPES pelo apoio financeiro.

Referências

[1] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*. Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.

[2] W. Van Assche, *Orthogonal Polynomials and Painlevé Equations*. Cambridge University Press, Belgium, 2017.

© 2020 SBMAC