Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Um estudo do comportamento de um sistema de sinalização

Sabrina Guilherme Marques [1]
Licenciatura em Matemática, FCT/UNESP, Presidente Prudente
Vanessa Botta[2]
Departamento de Matemática e Computação, FCT/UNESP, Presidente Prudente

1 Introdução

Com aplicações na Matemática, na Economia e na Farmacologia, entre outras áreas, o estudo das equações de diferença destaca-se por possibilitar a modelagem de sistemas dinâmicos que, muitas vezes, são descritos em intervalos de tempo discreto. Nesse sentido torna-se importante analisar o comportamento da solução geral dessas equações de diferença, pois caracterizam sua estabilidade e podem otimizar o sistema desenvolvido.

Vale ressaltar que, para que se tenha um sistema estável, ou seja, o sistema convirja para um ponto de equilíbrio, as raízes do polinômio característico dessa equação devem estar contidas no interior do círculo unitário ($|z| < 1$).

Neste trabalho abordaremos um exemplo de um sistema de sinalização, com aplicações na área de Teoria da Informação, modelado por uma equação de diferença, fazendo uma análise do comportamento da solução para o caso $n_1 = 2$ e $n_2 = 1$. Esse sistema de transmissão de informação pode ser visto com mais detalhes em [1].

2 Desenvolvimento do Modelo

Vamos construir, então, um sistema de sinalização que emite dois sinais, s_1 e s_2. Dessa forma, as mensagens enviadas são inicialmente codificadas utilizando esses dois sinais antes de serem transmitidas. Consideremos que s_1 precisa de n_1 unidades de tempo, enquanto s_2 precisa de n_2 unidades de tempo para que ocorra a transmissão. Com essas hipóteses podemos construir a equação $M(n)$, que representa o número total de mensagens.

Temos que um sinal de tempo n termina com um sinal s_1 ou um sinal s_2. Se uma mensagem termina com s_1, como este leva n_1 unidades de tempo, então o último sinal deve começar em $n - n_1$ unidades de tempo e, dessa forma, podemos concluir que há $M(n - n_1)$ possíveis mensagens de duração n que terminam com um sinal s_1. De forma análoga concluímos que há $M(n - n_2)$ de duração n que termina em um sinal s_2. Assim teremos que o total de mensagens $M(n)$ de duração n será dado pela equação

[1] *sa_marques_98@yahoo.com.br*
[2] *vanessa.botta@unesp.br*

$$M(n) = M(n - n_1) + M(n - n_2). \tag{1}$$

Supondo, sem perda de generalidade, $n_1 \geq n_2$, e fazendo uma mudança de variável teremos

$$M(n + n_1) - M(n + n_1 - n_2) - M(n) = 0. \tag{2}$$

Vamos analisar agora um caso particular de (2) onde consideramos $n_1 = 2$ e $n_2 = 1$, onde é possível notar que a equação recai na sequência de Fibonacci. Desta forma, temos

$$M(n + 2) = M(n + 1) + M(n), \tag{3}$$

cuja equação característica é $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$, com raízes $\lambda_1 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\lambda_2 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Note que como $|\lambda_1| > 1$ teremos um sistema instável.

No contexto abordado é coerente supor que no instante $n = 0$ nenhuma mensagem foi transmitida, então $M(0) = 0$. E em $n = 1$, como $n_2 = 1$, concluímos que $M(1) = 1$. Utilizando essas condições iniciais obtemos a solução geral do problema, que é da forma

$$M(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n, \quad n = 0, 1, 2, \cdots . \tag{4}$$

Assim, através de alguns testes computacionais, variando os valores de n_1 e n_2, também foi possível observar que os sistemas obtidos também são instáveis, ficando em aberto o estudo da estabilidade desse sistema de sinalização.

3 Conclusão

Esse trabalho ainda está em desenvolvimento, buscando mais informações acerca de sua estabilidade. Porém, nos casos desenvolvidos, pode-se notar que os sistemas de transmissão de sinal obtidos são instáveis. Isso implica que conforme o tempo n aumenta, o grau de desordem desse sistema aumentará exponencialmente, tornando-se impossível retornar ao seu estado inicial, sujeitando-se a ocorrência de erros com mais facilidade na transmissão do sinal.

Agradecimento

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro (Processo Número 2018/23921-8).

Referências

[1] S. Elaydi. *An introduction to difference equations, 3a. edição*. Springer Science+Business Media, Inc., New York, USA, 2005.