Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Solução da Equação de Poisson pelo Método da Solução Fundamental por Funções de Base Radial.

Gabriel Valim Calçada [1]
Aluno do Curso de Graduação do Curso de Matemática Aplicada e Computacional da UFRRJ
Edivaldo Figueiredo Fontes Junior [2]
Professor do Departamento de Matemática da UFRRJ

1 Introdução

Existem inúmeras técnicas para as soluções numéricas de Equações Diferenciais Ordinárias e Equações Diferenciais Parciais (EDO's e EDP's) [3]. Estas técnicas podem ser aplicadas com malhas não estruturadas e estruturadas para a discretização no espaço como no Método de Diferenças Finitas (MDF), Elementos Finitos (MEF), Elementos de Contorno (MEC), entre outros. Existem diversos métodos numéricos sem malha como por exemplo o método local de Petrov-Galerkin, métodos sem malha acoplados com outros métodos [2], e o abordado neste trabalho, denominado Método da Solução Fundamental (MSF) com funções de base radial (FBR) [4]. Cada um destes métodos possuem vantagens e desvantagens, cabendo ao pesquisador de acordo com suas experiências numéricas em diversos métodos estudados, avaliar em qual situação sua aplicação será mais indicada para modelar determinado fenômeno. Ou seja, aproveitar o que cada um tem de melhor.

A ideia básica do MSF detalhado em [1] é aproximar a solução do problema por meio da combinação linear de soluções fundamentais. Como exemplo da aplicação da técnica de MSF, neste trabalho fez-se a comparação da solução numérica da equação de Poisson com a solução analítica. Futuramente será realizada uma comparação com outros métodos numéricos tradicionais como o MEF.

Neste trabalho, o MSF para a equação de Poisson foi descrito para o operador de Laplace, desta forma deve-se assumir que a solução geral da equação de Poisson seja expressa como $u = u_h + u_p$, onde u_h é a solução da EDP de Laplace homogênea, que será obtida numéricamente através do MSF e u_p é uma solução particular da seguinte equação

$$\nabla^2 u_p = b. \tag{1}$$

onde b é um termo fonte, podendo ser inclusive não-linear. A função u_p em (1) é aproximada com FBR de suporte compacto através do método das soluções particulares (MSP).

[1] gabrielcalcada1@gmail.com
[2] edivaldofontes@ufrrj.br

1.1 Exemplo de Aplicação

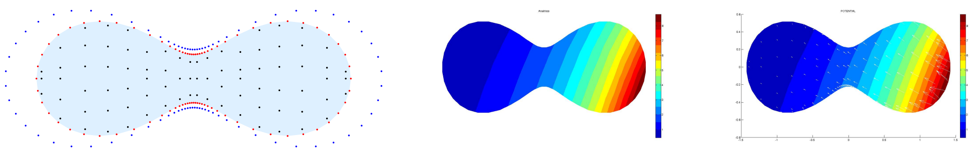
Considere o seguinte problema

$$\nabla^2 u = 2e^{x-y}\,, \qquad para \quad (x, y) \in \Omega \tag{2}$$

$u = e^{x-y} + e^{x} cos \;\; para \; (x, y) \in \partial\Omega$, onde Ω é o domínio do problema (2) e seu contorno $\partial\Omega$ definido pelas coordenadas $x = r(\theta) cos\,\theta \;\; e \;\; y = r(\theta) sin\,\theta$, onde $r(\theta) = \sqrt{cos\,2\theta + \sqrt{1.1 - sin^2 2\theta}}$,$0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Para simular o problema (2), foram utilizados 80 pontos no contorno (pontos vermelhos), 82 pontos internos (pontos pretos) e 80 fontes virtuais (pontos azuis) (Fig. 2(a). E utilizou-se funções de base radial de Wendland do tipo $C4$ com o parâmetro $\beta = 0.35$ [4] para aproximação de u_p em (1). Pode-se comparar a solução exata e numérica nos mapas de cores de u nas figuras 2(b) e 2(c), respectivamente, e foi obtido um erro global relativo de 0.001227 para este problema.

Figura 1: Representação do problema e das soluções



(a) Representação do problema. (b) Solução analítica. (c) Solução Numérica.

Outros problemas envolvendo a equação de Poisson e outras EDPs serão estudados numéricamente com o MFS/MSP e será realizada uma análise aprofundada do posicionamento de fontes virtuais e parâmetros livres envolvidos nestes métodos.

Referências

[1] G. F. Fasshauer. *Meshfree Approximation Methods with MATLAB*, World Scientific Publishing Co., Inc., 2007.

[2] E.F. Fontes, J.A.F. Santiago, J.C.F. Telles. An iterative coupling between meshless methods to solve embedded crack problems, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 55, pp. 52-57, 2015.

[3] R. G. Rice and D. D. Do. *Applied mathematics and modeling for chemical engineers, second edition*, Wiley, 2012.

[4] H. Wendland. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree, *Advances in Computational Mathematics*, n. 4, pp. 389–396, 1995.

