Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, v. 7, n. 1, 2020.

Trabalho apresentado no XXXIX CNMAC, Uberlândia - MG, 2019.

Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics

Solução da equação de Helmhotz pelo Método Multiquádrico.

Gabriel Valim Calçada [1]
Aluno do Curso de Graduação do Curso de Matemática Aplicada e Computacional da UFRRJ
Edivaldo Figueiredo Fontes Junior [2]
Professor do Departamento de Matemática da UFRRJ

1 Introdução

Existem inúmeros métodos para resolver Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Entre os métodos sem malha, o método das funções multiquádricas (MQ) tem ampla aplicação na solução de EDO [2]. Neste trabalho, o método MQ é aplicado em um problema simples, unidimensional, que apesenta solução analítica, podendo ser comparad com a solução numérica.

O método MQ é promissor não apenas para interpolação precisa de funções, mas também para cálculo de derivadas parciais e integrais. Estes cálculos tornam-se mais fáceis com auxílio das equações multiquadráticas quando comparados com outras técnicas numéricas convencionais. Dentre as Funções de Base Radial (FBR), as funções multiquádricas são de fácil implementação numérica. Ao aplicar esta técnica a um problema de valor de contorno discretizado com n-2 pontos, ter-se-a um sistema de n equações e portanto, podendo ser derminado n parâmetros, que definem o número de funções radiais que formam a função de interpolação. A seguir, é apresentado um exemplo típico de aplicação para ilustrar o uso da técnica.

1.1 Resolução analítica da função de Helmholtz

A equação de Helmhotz na forma unidimensional, representando o problema de reação de primeira ordem em uma partícula de catalisador, pode ser expressa na forma [1]

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' - \phi^2 y &=& 0 \quad para \quad x \in \Omega\,, \\ y' &=& 0, se \;\; x = 0\,, \\ y &=& 1, se \;\; x = 1\,, \end{array} \right. \tag{1}$$

onde $\Omega = [0, 1]$. A solução analítica para o problema (1) pode ser facilmente obtida pelo método da equação característica, sendo dada por $y = \frac{\cosh(\phi x)}{\cosh(\phi)}$.

[1] gabrielcalcada1@gmail.com
[2] edivaldofontes@ufrrj.br

Utilizando o método MQ, ou seja, a variável primal será aproximada por $u(x_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sqrt{(x - x_i)^2 + c}$, onde os $a_i's$ são os parâmetros a serem calculados e c é um parâmetro livre constante da função multiquádrica. Chega-se ao sistema linear obtido através do método da colocação pontual definido pelas duas condições de contorno e para os n nós no interior do domínio da função, sendo representado para os n nos internos como

$$\begin{cases} u''(x_i) - \phi^2 u(x_i) &= 0, \quad para \quad x_i \in \Omega, \\ u'(x_i) &= 0, \quad se \ \ x_i = 0, \\ u(x_i) &= 1, \quad se \ \ x_i = 1, \end{cases} \tag{2}$$

onde o sistema (simétrico) possui dimensão $n \times n$, podendo ser resolvido por algum *solver* direto.

Como resultado típico, considerando $\phi = 1$, e o ponto de colocação $x_1 = 0.5$, na Tabela 1 são apresentados os resultados de desvio relativo entre a solução exata e a numeríca em função da contante multiquadrática c.

Valores de c	0.2	0.4	0.6	0.8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
Desvio Relativo(%)	17,0	8,6	4,7	2,8	1,8	1,4	1,1	0,9	0,8

Tabela 1: Desvio Relativo entre a solução exata e numérca.

Pode-se notar que o desvio relativo apresentou um valor mínimo para $c = 1,8$. O valor ótimo de c será avaliado futuramente.

2 Conclusões

Os resultados mostraram que o método MQ é de fácil aplicação e quando comparada a soluções analíticas apresentou baixos desvios. Os valores dos parâmetros c foram obtidos a partir de uma análise do erro a partir da solução exata conhecida. Pretende-se utilizar futuramente um método de otimização do tipo quase-Newton para analisar a solução numérica do método MQ em função do parâmetro c.

3 Agradecimentos

Os autores agradecem a UFRRJ pelo apoio e ao CNPq pela bolsa de Iniciação Científica do programa PIBIC.

Referências

[1] R. G. Rice and D. D. Do. Applied mathematics and modeling for chemical engineers, *Wiley*, second edition, 2012.

[2] D.L. Young, S.C. Jane, C.Y. Lin, C.L. Chiu, K.C. Chen. Solutions of 2D and 3D laws using multiquadrics method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 28, pp. 1233-1243, 2004.